Grønn teknologi eller klimakrise: En teoretisk studie med to stokastiske terskler

Linnea Lorentzen

Working Paper 06/2018

CREE – Oslo Centre for Research on Environmentally Friendly Energy
acknowledges financial support from
The Research Council of Norway, University of Oslo and user partners.
ISBN: 978-82-7988-260-2
ISSN: 1892-9680
http://www.cree.uio.no

Grønn teknologi eller klimakrise: En teoretisk studie med to stokastiske terskler

Linnea Lorentzen

Masteroppgave for mastergraden
Samfunnsøkonomisk analyse

Økonomisk institutt

UNIVERSITET I OSLO

Mai 2018

Grønn teknologi eller klimakrise:
En teoretisk studie med to stokastiske terskler

Linnea Lorentzen
linnealorentzen@hotmail.com

Masteroppgave ved Økonomisk institutt

Veiledet av
Professor Jon Vislie
Økonomisk institutt

Under stipend ved
Oslo Centre for Research on Environmentally friendly Energy
og
Økonomisk institutt

Mai 2018

Grønn teknologi eller klimakrise: En teoretisk studie med to stokastiske terskler
http://www.duo.uio.no
Print: Reprosentralen, Universitetet i Oslo

Sammendrag

I denne oppgaven analyseres en dynamisk økonomi som står overfor muligheten for å nå to stokastiske terskler. Ved produksjon akkumuleres klimagassutslipp i atmosfæren, og ved et ukjent nivå akkumulert utslipp, vil en irreversibel klimakrise ramme økonomien. Kun et teknologisk gjennombrudd vil kunne redde samfunnet fra evig krise. Det teknologiske gjennombruddet vil først bli nådd ved et stokastisk nivå akkumulert kunnskap. Ved å enten avstå nyttegivende konsum eller øke utslippsgenererende produksjon, kan investeringene i forskning og utvikling øke. Investeringer i forskning og utvikling vil øke sannsynligheten for å nå det teknologiske gjennombruddet. Jeg bruker optimal kontrollteori under usikkerhet til å analysere en økonomi som står overfor to stokastiske terskler. Jeg finner at det vil være optimalt å dempe konsumet, så lenge sannsynligheten for å nå en klimakrise er høy. Dersom avkastningen av å investere i grønn teknologi er stor, vil det i mindre grad være nødvendig å dempe produksjonen.

Forord

Denne masteroppgaven avslutter 5 års studier i samfunnsøkonomi, og resulterer i mastergraden Samfunnsøkonomisk analyse. Arbeidet har vært spennende, og jeg har lært mye. Med bakgrunn i at jeg ønsket å drøfte et samfunnsrelevant spørsmål, og fordi jeg er engasjert i miljø og omstilling, falt tema meg naturlig. Jeg håper mitt arbeid kan bidra til å klargjøre noen av avveiningene man står overfor i utforming av poltikk innenfor miljøfeltet, teknologiutvikling og omstilling.

Det er mange som har bidratt til mitt resultat. Først og fremst vil jeg takke veilederen min Professor Jon Vislie for ypperlig veiledning, råd og oppfølgning. Professor Vislie er en fantastisk lærer og han har vist stor interesse for min oppgave. Hans veiledning har vært motiverende og svært behjelpelig. Jeg vil også takke *Oslo Centre for Research on Environmentally friendly Energy* og *Økonomisk institutt* for mottagelse av masterstipend.

Jeg vil rette en takk til Jens Furuholmen, Ralph Lorentzen, Philip Lorentzen og Cecilie Johansen for verdifulle kommentarer og diskusjon av oppgaven. Til slutt vil jeg også takke mine medstudenter på masterlesesalen i 10. etasje på Økonomisk institutt for et hyggelig miljø og mange gode diskusjoner.

Oslo, mai 2018

Linnea Lorentzen

Innhold

1 Introduksjon

En av de største utfordringene samfunnet vårt står overfor, er trusselen om en klimakrise. Utslippskutt, omstilling og klimaavtaler får mye omtale, og i 2015 kåret Språkrådet ”det grønne skiftet” til *årets ord* (Språkrådet, 2015). Begrepet er hyppig omtalt i debatten om veien til lavutslippssamfunnet. Debatten har fått mye oppmerksomhet, og omfavner temaer som utslipp, teknologi og omstilling.

Miljøvernorganisasjoner som Fremtiden i våre hender er aktive i debatten om det grønne skiftet. De tar ofte til orde for at forbruket må reduseres, og at det såkalte ”bruk-og-kast”-samfunnet er skadelig for miljøet. I rapporten *Jakten På den siste olje* (Fremtiden i våre hender, 2015) rettes kritikk mot selskapet Statoil for en fortsatt satsing på fossil energi, samtidig som man ønsker å bekjempe klimautfordringene verdenssamfunnet står overfor. Jeg vil i denne oppgaven drøfte hvorvidt miljøvernsorganisasjoner som Fremtiden i våre hender har rett i sin kritikk, og i hvilken grad det er optimalt å redusere ”skitten” produksjon og konsum.

Et brått kutt i all bruk av fossile brensler vil kunne gi store ringvirkninger for verdensøkonomien. Konsekvensene vil komme som resultat av kutt i verdens energiforskyvning, men også som tap av mange arbeidsplasser. I Norge er olje- og gassindustrien en økonomisk bærebjelke. En brå avslutning på leting etter olje og gass vil kunne gi fall i investeringer, eksport og arbeidsplasser. Dette vil sette spor i hele den norske økonomien.

Ved å drøfte en enkel økonomi, prøver jeg å besvare hvorvidt kutt i forbruket og stengte oljekraner er rett medisin. Jeg støtter miljøvernorganisasjonene i at det kan være nødvendig å kutte i forbruket frem til et grønt teknologiskifte har funnet sted. Jeg viser derimot at kutt i all utslippsgenererende produksjon ikke kan være den rette løsningen. Et dramatisk kutt vil gi store økonomiske konsekvenser, og dermed gjøre den nødvendige omstillingen utfordrende. For å nå et grønt teknologisk gjennombrudd før en klimakrise er et faktum, er det nødvendig å investere i forskning og utvikling. Men i en verden med knappe ressurser, er det umulig både å kutte all utslipp og å sørge for at et gjennombrudd finner sted.

2 Terskelverdier

I introduksjonen til *Environmental and Resource Economics* sitt spesialnummer: The Economics of Tipping Points, (de Zeeuw og Li 2016) introduseres terskelverdier. de Zeeuw og Li (2016) beskriver at selv ved gradvis utslipp av klimagasser, vil jordklodens økosystemet lenge forbli uendret. Først ved et kritisk høyt nivå på akkumulert utslipp, vil økosystemet kunne skifte til en ny tilstand. Man kan tenke seg at man gradvis fyller et vannglass. Når glasset er fylt til randen, skal det bare en liten dråpe til før glasset renner over. På samme måte kan kontinuerlig klimagassutslipp forårsake en irreversibel klimakrise. Ved en kritisk mengde akkumulert utslipp vil en terskel nås og krisen utløses. At klimakrisen er irreversibel, vil si at det ikke er mulig å reversere den marginale økningen i klimagasser som utløste krisen.

I min modell antar jeg at miljøet er en knapp ressurs av ukjent størrelse. Ressursen tappes ved klimagassutslipp, og ved et ukjent tidspunkt vil den tømmes. Jo mer klimagasser som slippes ut, jo nærmere vil akkumulert utslippsnivå komme terskelen som forårsaker en miljøkatastrofe. Når man fyller et vannglass, ser man enkelt når glasset er fullt. Ved utslipp av klimagasser er mengden klimagassutslipp som skal til for å tømme miljøressursen, derimot usikker. Usikkerheten gjør at muligheten for å nå krisen alltid vil være tilstede. Man kan aldri med sikkerhet vite om ressursen er tappet og om en marginal utslippsøkning vil tippe økosystemet over i evig ulykke. Det eneste som kan fastslås med sikkerhet, er at høyere utslipp gir høyere sannsynlighet for å nå den skjebnesvangre krisen.

Klimakrisen kan unngås ved kutt i utslipp. Ved lavere utslipp, vil sannsynligheten for å nå miljøkrisen falle. Jeg antar at utslipp genereres ved produksjon. Utslipp kan kuttes ved lavere produksjon, eller ved å utvikle grønn teknologi som muliggjør produksjon uten utslipp. Å investere i grønn teknologi krever ressurser, og investeringen kan finansieres på to måter. Gitt produksjonsnivå, kan ressurser allokeres fra konsum til investering i grønn teknologi. Det vil gi et løpende nyttetap. Alternativt kan man øke ressursene til rådighet ved å øke produksjonen. Høyere produksjon gir høyere utslipp og økt sannsynlighet for å nå klimaterskelen. Begge alternativene har med andre ord en kostnad.

Avkastningen på investering i forskning og utvikling er usikker. Å utvikle en ny teknologi kan kreve mye kunnskap, og jeg argumenterer derfor for at det må et vist nivå akkumulert kunnskap til for å nå et gjennombrudd. Ved å investere i forskning og utvikling kan man aldri vite når forskningen vil gi et gjennombrudd. Det er usikkert om forskningen i det hele tatt vil kunne lede frem. Derfor er det grunn til å anta at avkastningen på innsats i forskning og utvikling er stokastisk, og at først ved et ukjent nivå på investering vil et gjennombrudd inntreffe.

Med dette til grunn, antar jeg at dersom det teknologiske gjennombruddet skal finne sted, kreves investering i grønn teknologi. Jeg antar også at det er usikkert når det teknologiske gjennombruddet vil inntreffe, og at investering ikke gir noen annen form for nytte enn verdien av økt sannsynligheten for et gjennombrudd. På samme måte som for klimagassutslipp, kan man aldri med sikkerhet vite om en marginal investering vil gi et gjennombrudd. Derimot kan man slå fast at jo mer som investeres, jo nærmere kommer gjennombruddet.

Dersom det teknologiske gjennombruddet inntreffer før miljøkrisen, er samfunnet reddet. Hvis miljøkrisen derimot skulle inntreffe før gjennombruddet, vil konsekvensene være kritiske. Investeringene i grønn teknologi er da forgjeves, og økonomien vil befinne seg i evig ulykke.

Om sannsynligheten for å nå miljøterskelen i nær fremtid er liten, vil skaden som påføres fremtiden av utslipp i mindre grad internaliseres i dagens velferd. Det kan gå mange år, kanskje generasjoner, mellom utslipp og den potensielle terskelen. Tilsvarende kan det være vanskelig å motivere investering i grønn teknologi dersom det er lav sannsynlighet for å nå et teknologisk gjennombrudd. Fordi investeringer ikke gir noen annen form for nytte enn verdien av å komme nærmere et teknologisk gjennombrudd, vil nytten av å investere avhenge av hvor sannsynlig et gjennombrudd er. Dersom sannsynligheten for å nå et gjennombrudd er lav, vil insentivene til å investere på bekostning av konsum være liten.

3 Relatert litteratur

På 1970- og 80-tallet ble det skrevet mye (Dasgupta 1982; Dasgutpa & Stiglitz 1981; Kamien & Schwartz 1978; Loury 1978) om optimal forbruk av ikke-fornybare ressurser som innsats i produksjon. Forskning i denne perioden tok for seg utvinning av ressurser av ukjent størrelse. Den dekket muligheten for utvikling av en ny og kostnadseffektiv teknologi som ville kunne opptre som et perfekt substitutt for den knappe ressursen. Den eldre litteraturen har fått en renessanse i dag, da man kan betrakte jordklodens økosystem som en knapp ressurs av ukjent størrelse. En krise vil kunne oppstå dersom hele miljøressursen tappes, og kun et teknologisk gjennombrudd kan avverge krisen. I tråd med den tidligere forskningen jeg henviser til, stiller jeg spørsmålet om hvorvidt man kan sikre seg mot at den knappe ressursen ikke skal gå tom før det teknologiske gjennombruddet finner sted.

Blant andre, analyserer Kamien og Schwartz (1978) og Dasgutpa og Stiglitz (1981) optimal forbruk av en knapp ressurs, når en alternativ teknologi kan utvikles og erstatte den knappe ressursen. I likhet med min analyse, antar Kamien og Schwartz at det er usikkert når et gjennombrudd vil inntreffe, og at leteinnsatsen etter den nye teknologien er endogen. Avveiningen mellom konsum og investering har derfor fått en stor i plass i deres analyse. Også Dasgutpa og Stiglitz (1981) analyserer forbruk av en ikke-fornybar ressurs når en alternativ teknologi vil utvikles ved et usikkert tidspunkt. I motsetning til Kamien og Schwartz, antar de at utviklingen av teknologien er eksogen. Som konsekvens av denne antagelsen, drøfter ikke Dasgupta og Stiglitz avveiningen mellom konsum og investering i teknologi. De spør derimot hvordan man kan sikre seg mot å tømme den knappe ressursen før det teknologiske gjennombruddet finner sted. I følge Dasgupta og Stiglitz (1981) vil optimalt forbruk avhenge av ressursens størrelse.

Både Kamien og Schwartz (1978), og Dasgupta og Stiglitz (1981) bruker optimal kontrollteori i sine analyser. I artikkelen "Resource Depletion, Research and Development, and the Social Rate of Discount" (1982), analyserer Dasgupta et kontrollproblem der han antar at konsum tapper en knapp ressurs av kjent størrelse. I likhet med min analyse, antar han at ved et ukjent nivå akkumulert kunnskap vil det være mulig å nå et teknologisk gjennombrudd. Gjennombruddet vil kunne frembringe et perfekt substitutt til den knappe ressursen. Mitt og Dasguptas (1982) arbeid har mange fellestrekk. Likevel har jeg tatt et skritt videre, og antar at den knappe ressursen også har ukjent størrelse.

Som Dasgupta (1982), løser Loury (1978) et ressursproblem der han finner optimal forbruk av en knapp ressurs, men av usikker størrelse. Selv om det er flere likhetstrekk mellom min og Lourys analyse, bruker han ikke optimal kontrollteori. Likevel er resultatene interessante. I likhet med meg, finner han problemets optimale konsumbane, og mine tolkninger ligger tett opp mot hans. Hans arbeidet danner grunnlaget for en stor del av min analyse.

I motsetning til i min analyse, antar forfatterne i de eldre artiklene jeg har henvist til at innsatsfaktorer i produksjon er ikke-fornybare. Det er nærliggende å tenke på disse innsatsfaktorene som fossilt brensel; eller "skitne" innsatsfaktorer. Jeg antar at miljøskaden fra bruken av disse skitne innsatsfaktorene kan være store. Dersom de er store nok, kan miljøet bli så skadet at samfunnet vil kunne oppleve en miljøkatastrofe. Dermed kan miljøressursen bli tømt før kull- og oljelagrene. Som følge av dette, tar jeg høyde for at beholdningen av de skitne innsatsfaktorene foreligger i ubegrenset mengde.

I artikkelen "The Environment and Directed Technical Change" av Acemoglu, Aghion, Bursztyn og Hémous (2012), analyseres en voksende økonomi der man kan produsere et gode både ved hjelp av en "ren" og en "skitten" innsatsfaktor.

Ved å bruke av den skitne innsatsfaktoren, blir miljøet ødelagt. Forfatterne viser i sin analyse at desentraliserte aktører vil føre økonomien inn i en miljøkatastrofe fremfor den optimale løsningen. Acemoglu et al. ser bort fra usikkerhet, men de antar, i likhet med meg, at den teknologiske utviklingen er endogen. I artikkelen argumenterer de for at så lenge den rene og den skitne innsatsfaktoren kan opptre som substitutter, kan en bærekraftig vekst opprettholdes ved hjelp av en karbonskatt og en teknologisubsidie. I tillegg peker de på at i den desentraliserte økonomien vil overgangen til rene innsatsfaktorer være enklere dersom den "skitne" innsatsfaktoren er en knapp ressurs. Min analyse støtter opp under ønske om å øke innsatsen i utviklingen av en grønn teknologi. Acemoglu et al. (2012) sin analyse tar derimot ikke innover seg utsikkerhet, noe jeg gjør.

Acemoglu et al. (2012) tar som sagt ikke inn over seg usikkerhet. Det gjør derimot van der Ploeg og Zeeuw (2013, 2017), Lemoine og Treager (2014, 2016) og Strøm og Vislie (2017). I likhet med meg, analyserer van der Ploeg og Zeeuw (2017) og Lemoine og Treager (2014) faren for å nå en irreversibelt terskel ved utslipp av klimagasser. Ved å nå en klimaterskel, vil økonomien bli ført inn i en irreversibel klimakrise. Lemoine og Treager (2014) bruker en integrert klima-økonomimodell til å estimere den faktiske samfunnsøkonomiske kostnaden av karbonutslipp og hva som er en samfunnsplanleggers optimale respons på faren for å nå en irreversibel klimaterskel. De antar at optimal inngripen i markedet vil påvirke både sannsynligheten for å nå en terskel, og konsekvensene av å nå terskelen. I motsetning til Lemoine og Treager (2014), bruker ikke jeg en integrert klima-økonomimodell, jeg drøfter ikke utformingen av en mulig karbonskatt og jeg antar at det ikke er mulig å påvirke velferden etter klimakrisen. Analysen til Lemoine og Treager er likevel relevant for min analyse, fordi de analyserer faren for å nå en irreversibel klimaterskel ved et ukjent nivå av klimagassutslipp.

Litteraturen jeg har oppsummert, tar for seg innføring av en ny og kostnadseffektiv teknologi samt faren for å nå en klimaterskel. Flere av de tidligere artiklene jeg har trukket frem (Dasgupta 1982; Dasgutpa & Stiglitz 1981; Kamien & Schwartz 1978) har analysert problemstillingen knyttet til om et ukjent akkumulert kunnskapsnivå vil kunne utvikle en ny grønn kostnadseffektiv teknologi. Nyere forskning (Lemoine & Treager 2014, 2016; Strøm & Vislie 2017; van der Ploeg & Zeeuw 2013, 2017) har drøftet problemstillinger knyttet faren for å nå en klimaterskel, som vil føre økosystemet over i en irreversibel krise ved et ukjent nivå på klimagassutslipp. I denne oppgaven kombinerer jeg disse to problemstillingene. Jeg drøfter muligheten for å utvikle en ny grønn teknologi, når man står i fare for å nå en klimaterskel. Min analyse er en teoretisk studie av en økonomi som står overfor to potensielle terskler.

4 Modell

Målet for en samfunnsplanlegger er å maksimere neddiskontert nytte i all fremtid. Uten usikkerhet er dette et relativt enkelt problem å analysere. I denne oppgaven tar jeg derimot for meg to former for usikkerhet. For det første er det usikkert hvor mye klimagassutslipp som skal til før en klimakrise inntreffer. For det andre er det usikkert hvor mye kunnskap som kreves for at et teknologisk gjennombrudd skal finne sted. Jeg analyserer en dynamisk økonomi som står overfor endogene sannsynligheter for å nå klimaterskelen og teknologiterskelen.

Jeg antar at all form for usikkerhet opphører når den første terskelen nås. Da vet samfunnsplanleggeren med sikkerhet om det er en klimakrise eller et teknologisk gjennombrudd som har inntruffet. Uavhengig av hvilken terskel som nås først, er den optimale løsning etter terskelen bestemt. Planleggeren vil gjennomføre den optimale løsningen gitt avsløringen, og avhengig av hvilken terskel som nås vil økonomien oppnå høy eller lav velferd. Det vil selvsagt være optimalt å nå den *gode* terskelen, da det vil gi høy velferd. Samfunnsplanleggerens problemet er å finne den optimale strategien som leder økonomien mot den gode terskelen.

Målet for analysen er å finne optimalt nivå på produksjon, konsum og investering i forskning og utvikling, så lenge ingen av tersklene er nådd. Produksjon kan brukes til konsum og investering i forskning og utvikling. Optimalt konsum og investering blir på alle tidspunkter begrenset av ikke å kunne overgå produksjonen. Denne begrensningen er gitt av ressursbetingelsen, der c_t betegner konsum, m_t investeringer, x_t bruk av fossilt brensel, og $f(x_t)$ produksjon ved tidspunktet t:

$$f(x_t) = m_t + c_t$$

$f(x_t)$ tolkes som nettoprodukt. Jeg antar at det er voksende i klimagassutslipp, men at marginalproduktiviteten er avtagende. Jo mer fossilt brensel som brukes, jo mer sannsynlig er det å nå klimakrisen. Jeg definerer z_t som mengden utslipp som akkumuleres i atmosfæren fra tidspunkt null til tidspunktet t, og x_t bruk av fossilt brensel per tidsenhet[1].

$$z_t = \int_0^t x_s ds$$

$$\dot{z}_t = x_t$$

[1]Jeg antar at bruk av fossilt brensel og klimagassutslipp er i én-til-én-forhold, og begrepene kan derfor brukes om hverandre.

Kunnskap akkumuleres ved investering i grønn teknologi. Jo mer som investeres, jo nærmere kommer den ukjente terskelverdien som utløser det teknologiske gjennombruddet. $h(m_t)$ er økt akkumulert kunnskap per tidsenhet. Jeg antar at akkumulert kunnskap øker ved investering, men at økningen avtagende. k_t definerer jeg som mengden akkumulert kunnskap fra tidspunkt null til tidspunkt t.

$$k_t = \int_0^t h(m_s)ds$$

$$\dot{k}_t = h(m_t), h'(m_t) > 0, h''(m_t) < 0, h(0) = 0$$

Jeg definerer σ_t som fallraten i grenseakkumulasjonen av kunnskap. Dersom akkumulasjonen av kunnskap faller raskt i investeringer, er absoluttverdien av σ_t høy. $\sigma_t := -\frac{h''(m_t)}{h'(m_t)}m_t$, og jeg antar at σ_t er konstant lik σ over tid. I tillegg antar jeg $lim_{m\to 0}\ h'(m_t) = \infty$.

La meg først angi $P(t)$ som sannsynligheten for at en av de to begivenhetene finner sted innen tidspunkt t. I problem 4.1 er dermed $P'(t)dt$ sannsynligheten for at en hendelse inntreffer i tidsintervallet $[t, t + dt]$. Dersom en hendelse faktisk finner sted, definerer jeg $Pr(miljøkrise)$ og $Pr(teknologisk\ gjennombrudd)$ som sannsynlighetene for at det henholdsvis er miljøkrisen og det teknologiske gjennombruddet som finner sted i det lille tidsintervallet[2]. $u(c)$ betegner nytte av konsum, og V^{TG} og V^{MK} verdifunksjonene etter henholdsvis det teknologiske gjennombruddet og miljøkrisen har inntruffet. Jeg antar at V^{TG} og V^{MK} måles i nytteenheter og er konstante over tid. Fordi nåtid verdsettes høyere enn fremtid,

[2] Jeg kommer tilbake til disse sannsynlighetene.

neddiskonteres fremtiden med nyttediskonteringsraten r. Dermed kan samfunnsplanleggerens maksimeringsproblem skisseres som:

Problem 4.1.

$$Max_{c,m,x} \int_0^\infty P'(\tau))\Big[\int_0^\tau e^{-rt}u(c_t)dt + e^{-r\tau}\big(Pr(miljøkrise)\cdot V^{MK} + Pr(teknologisk\ gjennombrudd)\cdot V^{TG}\big)\Big]d\tau$$

$$forutsatt\ at$$

$$\dot{z}_t = x_t,\ z(0) = 0,\ z(\infty)\ er\ fri,$$

$$\dot{k}_t = h(m_t),\ k(0) = 0,\ k(\infty)\ er\ fri,$$

$$f(x_t) = c_t + m_t$$

Nyttefunksjon $u(c)$ har standard egenskaper med positiv og avtagende marginalnytte, $u'(c) > 0$ og $u''(c) < 0$. Ved å anta $lim_{c\to 0}\ u'(c_t) = \infty$, sikres at problemet har en indre løsning. Jeg definerer $\omega_t := -\frac{u''(c_t)}{u'(c_t)}c_t$ som grensenyttefleksibiliteten, og jeg antar at ω_t er konstant over tid. Grensenyttefleksibiliteten forteller hvor raskt grensenytten av konsum faller i konsum. $\big(Pr(miljøkrise)\cdot V^{MK} + Pr(teknologisk\ gjennombrudd)\cdot V^{TG}\big)$ tolkes som planleggerens forventning om velferd etter en terskel er nådd.

Problemet jeg ønsker å løse har form som Problem 4.1. Funksjonen som skal maksimeres, er en kontinuerlig vektet sum over velferd i alle tidspunkter en hendelse kan inntreffe. Hvert lille tidsintervall vektes med sannsynligheten for at en hendelse inntreffer akkurat da. Dersom en hendelse skulle inntreffe i det lille tidsintervallet $[t, t+dt]$, vil nytte av konsum bli oppnådd i alle tidspunkter frem til hendelsen inntreffer. For hvert lille tidsintervall hendelsen kan inntreffe, og for hver historie frem til hendelsen inntreffer, har planleggeren en forventning om fremtidig velferd etter terskelen. Forventningen er gitt som en vektet sum av V^{MK} og V^{TG}.

Om sannsynlighetene

For å løse Problem 4.1, må de angitte sannsynlighetene defineres. Jeg vil derfor definere sannsynlighetsfordelingene for en miljøkrise og et teknologisk gjennombrudd. Ved hjelp av disse kan jeg utlede de nødvendige sannsynlighetene for å kunne sette opp problemet jeg vil løse.

Den kumulative sannsynlighetsfordelingen for å nå en miljøkrise er gitt som F. Den stokastiske variabelen X er det ukjente nivået akkumulert utslipp som utløser krisen, og $z(t)$ er akkumulert utslipp ved tidspunktet t. $F(z)$ er sannsynligheten for at det akkumulerte utslippsnivået z overstiger det kritiske nivået X. Sannsynligheten for å nå det kritiske nivået øker i akkumulert utslippsnivå, og er lik null dersom det akkumulert klimagassutslippet er lik null. Dersom utslippet går mot uendelig, går sannsynligheten for en krise mot 1.

$$F(z) = Pr(X \leq z),$$

som gir

$$F(z(t)) = Pr(X \leq z(t)),$$

$$F'(z) > 0, \; F(0) = 0, \; lim_{z \to \infty} F(z) = 1$$

Jeg antar at $z(t)$ er monotont voksende. Med andre ord er z voksende over alle tidspunkter. La den stokastiske variabelen T_1 være tidspunktet en miljøkrise vil inntreffe, og la $\Omega(t)$ være sannsynligheten for at en miljøkrise inntreffer innen tidspunkt t. Da er:

$$F(z(t)) = Pr(X \leq z(t)) = Pr(z^{-1}(X) \leq t) := Pr(T_1 \leq t) := \Omega(t)$$

Jeg antar at ved å slippe ut klimaskadelige gasser i uendelig tid, vil en miljøkrise med sikkerhet inntreffe. Derfor, når tiden går mot uendelig og man ser bort fra et mulig teknologisk gjennombrudd, antar jeg at sannsynligheten for en miljøkrise går mot 1.

Sannsynligheten for å nå et teknologisk gjennombrudd, ved akkumulert kunnskapsnivå k, er gitt som $G(k)$. Sannsynlighetsfordelingen $G(k)$ gir derfor sannsynligheten for at akkumulert kunnskap overstiger den utløsende terskelen. Terskelverdien blir representert ved den stokastiske variabelen R.

$$G(k) = Pr(R \leq k),$$

som gir

$$G(k(t)) = Pr(R \leq k(t)),$$

$$G'(k) > 0,\ G(0) = 0,\ lim_{k \to \infty} G(k) = 1$$

Jeg antar at også $k(t)$ er monotont voksende. La den stokastiske variabelen T_2 være tidspunktet det teknologiske gjennombruddet vil inntreffe, og la $\Pi(t)$ være sannsynligheten for gjennombruddet inntreffer innen tidspunkt t. Fordelingen kan dermed omformuleres til $\Pi(t)$, og angi sannsynligheten for å nå det teknologiske gjennombruddet innen et tidspunkt t:

$$G(k(t)) = Pr(R \leq k(t)) = Pr(k^{-1}(R) \leq t) := Pr(T_2 \leq t) := \Pi(t)$$

Dersom man ser bort fra at miljøkrisen kan inntreffe, antar jeg at $\Pi(t)$ vil gå mot 1 når tiden går mot uendelig. Så lenge ikke miljøkrisen kommer gjennombruddet i forkjøpet, vil investering i uendelig lang tid utløse et gjennombrudd.

Jeg antar at kunnskapsnivået som utløser det teknologiske gjennombruddet er stokastisk uavhengig av akkumulert utslipp. På samme måte antar jeg at utslippsnivået som utløser miljøkrisen, er stokastisk uavhengig av akkumulert kunnskap. De to stokastiske variablene X og R, er derfor stokastisk uavhengige. Da følger det at T_1 og T_2 er stokastisk uavhengige. Jeg definerer tidspunktet T som tidspunktet da den første av de to hendelsene inntreffer.

$$T = min[T_1, T_2]$$

Sannsynligheten for at en begivenhet har inntruffet innen tidspunkt t, er:

$$\begin{aligned}
P(t) = Pr(T \leq t) = 1 - Pr(T \geq t) &= 1 - Pr(Min(T_1, T_2) \geq t) \\
&= 1 - Pr(T_1 \geq t \cap T_2 \geq t) \\
&= 1 - (1 - F(z(t)))(1 - G(k(t)))
\end{aligned}$$

En hendelse kan bli utløst av enten miljøkrisen eller det teknologiske gjennombruddet. Jeg kaller A_1 begivenheten som blir utløst ved klimaterskelen og A_2 begivenheten som blir utløst ved gjennombruddet. Jeg definerer sannsynligheten for at miljøkrisen utløser hendelsen i et lite tidsintervall $[t, t + dt]$, som $Pr(A_1)$. Tilsvarende definerer jeg sannsynligheten for at det teknologiske gjennombruddet utløser hendelsen i et lite intervall $[t, t + dt]$, som $Pr(A_2)$.

$$A_1 = \big[T_1 \in [t, t+dt] \;\; \cap \;\; \big[T_2 \geq (t+dt)\;\big]$$

$$A_2 = \big[T_2 \in [t, t+dt]\;\big] \;\; \cap \;\; \big[T_1 \geq (t+dt)\;\big]$$

Dermed kan jeg finne sannsynlighetene for A_1 og A_2 som:

$$\begin{aligned}
Pr(A_1) &= Pr\Big(\;\big[T_1 \in [t, t+dt]\;\big] \;\cap\; \big[T_2 \geq \;(t+dt)\big]\;\Big) \\
&= Pr\Big(\;\big[T_1 \in [t, t+dt]\;\big]\;\Big) \cdot Pr\Big(\;\big[T_2 \geq \;(t+dt)\big]\;\Big) \\
&= F'(z(t))\dot{z}_t \cdot (1 - G(k(t))) \\
&= F'(z(t))x_t \cdot (1 - G(k(t)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Pr(A_2) &= Pr\Big(\;\big[T_2 \in [t, t+dt]\;\big] \;\cap\; \big[T_1 \geq \;(t+dt)\big]\;\Big) \\
&= Pr\Big(\;\big[T_2 \in [t, t+dt]\;\big]\;\Big) \cdot Pr\Big(\;\big[T_1 \geq \;(t+dt)\big]\;\Big) \\
&= G'(k(t))\dot{k}_t(1 - F(z(t))) \\
&= G'(k(t))h(m_t)(1 - F(z(t)))
\end{aligned}$$

Jeg ønsker å definere planleggerens forventing om velferden som utløses dersom en hendelse skulle inntreffe. Derfor må jeg finne sannsynlighetene for en miljøkrise og et gjennombrudd, når en hendelse faktisk har inntruffet. Ved hjelp av $Pr(A_1)$ og $Pr(A_2)$, utleder jeg $\Gamma(z(t), k(t), \dot{z}_t, \dot{k}_t, t)$ og $\Lambda(z(t), k(t), \dot{z}_t, \dot{k}_t, t)$ som disse sannsynlighetene.

$$\begin{aligned}\Gamma(z(t), k(t), \dot{z}_t, \dot{k}_t, t) &:= \frac{Pr(A_1)}{Pr(A_1) + Pr(A_2)} \\ &= \frac{F'(z(t))x_t \cdot (1 - G(k(t)))}{F'(z(t))x_t \cdot (1 - G(k(t))) + G'(k(t))h(m_t)(1 - F(z(t)))}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Lambda(z(t), k(t), \dot{z}_t, \dot{k}_t, t) &:= \frac{Pr(A_2)}{Pr(A_1) + Pr(A_2)} \\ &= \frac{G'(k(t))h(m_t)(1 - F(z(t)))}{F'(z(t))x_t \cdot (1 - G(k(t))) + G'(k(t))h(m_t)(1 - F(z(t)))}\end{aligned}$$

De to sannsynlighetene $\Gamma(z(t), k(t), \dot{z}_t, \dot{k}_t, t)$ og $\Lambda(z(t), k(t), \dot{z}_t, \dot{k}_t, t)$ avhenger av hele funksjonsforløpet til z og k frem til tidspunkt t, samt $\dot{z}_t$, $\dot{k}_t$ og t. Jeg vil henvise til dem som Γ_t og Λ_t.

Jeg antar at:

$$\frac{\partial \Gamma_t}{\partial z} > 0, \; \frac{\partial \Gamma_t}{\partial k} < 0,$$
$$\frac{\partial \Lambda_t}{\partial z} < 0, \; \frac{\partial \Lambda_t}{\partial k} > 0$$

der sannsynligheten for at klimakrisen er hendelsen som inntreffer, er stigende i akkumulert utslipp og fallende i akkumulert kunnskap. Sannsynligheten for at det teknologiske gjennombruddet er hendelsen som inntreffer, antar jeg er fallende i akkumulert utslipp og stigende i akkumulert kunnskap.

Sannsynligheten for at en begivenhet skal inntreffe i det lille tidsintervallet $[t, t + dt]$, er gitt som summen av $Pr(A_1)$ og $Pr(A_2)$. Jeg kaller denne summen for

$P'(t)$, og funksjonen kan behandles og tolkes som en vanlig tetthetsfunksjon[3].

$$
\begin{aligned}
P'(t) &:= Pr(A_1) + Pr(A_2) \\
&= F'(z(t))x_t(1 - G(k(t))) + G'(k(t))h(m_t)(1 - F(z(t)))
\end{aligned}
$$

Ved hjelp av sannsynlighetene jeg har utledet, kan jeg sette opp Problem 4.1 på nytt. $\Theta(z(t), k(t), \dot{z}_t, \dot{k}_t, t) := \Gamma(z(t), k(t), \dot{z}_t, \dot{k}_t, t) \cdot V^{MK} + \Lambda(z(t), k(t), \dot{z}_t, \dot{k}_t, t) \cdot V^{TG}$ angir samfunnsplanleggerens forventning om velferden som utløses dersom en hendelse skulle inntreffe i et tidsintervall $[t, t + dt]$, sett fra $t = 0$.

Problem 4.2.

$$
\begin{gathered}
Max_{c,m,x} \int_0^\infty P'(t) \Big[\int_0^t e^{-r\tau} u(c_\tau) d\tau + e^{-rt} \Theta(z(t), k(t), t) \Big] dt \\
forutsatt\ at \\
\dot{z}(t) = x_t,\ z(0) = 0,\ z(\infty)\ er\ fri, \\
\dot{k}(t) = h(m_t),\ k(0) = 0,\ k(\infty)\ er\ fri, \\
f(x_t) = c_t + m_t \\
\Theta(z(t), k(t), \dot{z}_t, \dot{k}_t, t) = \Gamma(z(t), k(t), \dot{z}_t, \dot{k}_t, t) \cdot V^{MK} + \Lambda(z(t), k(t), \dot{z}_t, \dot{k}_t, t) \cdot V^{TG}
\end{gathered}
$$

Før jeg løser dette problemet og drøfter mulige løsninger, vil jeg løse to mye enklere problemer. Jeg vil drøfte avveiningen mellom konsum og utslipp isolert, og avveiningen mellom konsum og investering i en kostnadseffektiv teknologi isolert. Ved å splitte det store problemet opp i to delproblemer, vil det bli enklere å ka-

[3]Jeg ser at P'(t) er tettheten til P(t), som jeg har funnet tidligere.

rakterisere løsningen på det store problemet. Jeg vil kunne overføre resultatene fra de to delproblemene, og enklere forstå de komplekse sammenhengene.

5 Trusselen om en klimakrise

La meg først analysere et enkelt problem der kun produksjonsmengden kan kontrolleres. Jeg antar at alle produserte enheter går til nyttegivende konsum, og at det ikke er mulig å investere i utvikling av en ny grønn teknologi. Ved å produsere genereres klimagasser, og ved et ukjent utslippsnivå vil en irreversibel klimakrise inntreffe. I denne enkle fremstillingen, står samfunnsplanleggeren overfor en avveining mellom konsum og utslipp. Ved produksjon oppnås nyttegivende konsum, samtidig som sannsynligheten for en klimakrise øker i all fremtid. Så lenge nytteverdien av å utsette klimakrisen er større enn verdien av å konsumere i dag, vil det fra planleggerens synspunkt være optimalt å utsette konsum i dag.

For å finne optimalt produksjons- og konsumnivå, vil samfunnsplanleggeren løse Problem 5.1. Her er $e^{-r\tau}\epsilon$ nytte av å nå klimaterskelen, neddiskontert fra og med tidspunktet klimakrisen inntreffer, der ϵ er forventet ex post velferd.

Problem 5.1.

$$Max_{c,x} \int_0^\infty \Omega'(\tau)\Big[\int_0^\tau e^{-rt}u(c_t)dt + e^{-r\tau}\epsilon\Big]d\tau$$

$$forutsatt\ at$$

$$\dot{z}(t) = x_t,\ z(0) = 0,\ z(\infty)\ er\ fri,$$

$$f(x_t) = c_t$$

Jeg setter opp den tilhørende løpende Hamiltonfunksjonen og finner de optimale betingelsene. Jeg antar at $f(x_t) = x_t$[4]:

$$H(t, x, z, q) = (1 - F(z_t))u(x_t) + F'(z_t)x_t\epsilon + q_t[x_t]$$

$$H'_x = (1 - F(z_t))u'(c_t) + F'(z_t)\epsilon + q_t \leq 0$$

$$\dot{q}_t = rq_t - H'_z = rq_t + F'(z_t)u(c_t) - F''(z_t)x_t\epsilon$$

Den første optimumsbetingelsen vil holde med likhet. Dette følger av antagelsen $lim_{c \to 0}\ u'(c_t) = \infty$, som sikrer at problemet har en indre løsning.

Noen resultater

Jeg definerer hasardraten $\mu_t := \frac{F'(z_t)}{1-F(z_t)}$ som den betingede sannsynligheten for å nå klimakrisen i nær fremtid, gitt at den ennå ikke har inntruffet ved akkumulert utslippsnivå z_t. Ved å løse differensiallikningen for den adjungerte funksjonen q_t over, finner jeg:

$$\frac{q_t}{1 - F(z_t)} + \mu_t\epsilon = \int_t^\infty e^{-r(\tau - t)} \frac{F'(z_\tau)x_\tau}{1 - F(z_t)} \frac{r\epsilon - u(c_\tau)}{x_\tau} d\tau$$

Uttrykket gir ressursverdien pluss miljøressursens avkastning på et tidspunkt t, betinget på at klimaterskelen ennå ikke har inntruffet ved utslippsnivå z_t. Ressursverdien er representert ved miljøressursens negative skyggepris q_t, og reflekterer kostnaden av at den utløsende terskelen kommer nærmere. Miljøressursens

[4] Jeg henviser til Appendiks A for full utregning.

avkastning er velferden som oppnås dersom klimakrisen faktisk skulle inntreffe, ganget med sannsynligheten for at det skulle skje ved et nært fremtidig tidspunkt. Den betingede sannsynligheten for å nå en miljøkrise i et nær fremtid, gitt at den ennå ikke har inntruffet ved utslippsnivå z_t, er μ_t.

Høyre side av likheten tolkes som den neddiskonterte fremtidige avkastningen av å utsette konsum. Tolkingen følger av Loury (1978, s.626). Ved å utsette konsum i tidspunktet t, faller produksjon og utslipp. Som resultat skifter den akkumulerte utslippsbanen $\dot{z}(t)$ ned, og klimakrisen utsettes. Det er usikkerhet knyttet til hvilket nivå akkumulert utslipp som vil utløse en krise. Jeg tenker meg først, som Loury (1978), at klimakrisen inntreffer med sikkerhet i tidspunkt s, $s \geq t$. Ved å avstå konsum i tidspunkt t vil krisen bli utsatt med $\frac{1}{x_s}$ tidsenheter[5]. Dette gir en nyttegevinst lik $e^{-r(s-t)}\frac{r\epsilon - u(c_t)}{x_s}$. Siden det er usikkerhet knyttet til når krisen vil bli utløst, er den samlede verdien en kontinuerlig vektet sum over alle mulige fremtidige små tidsintervall krisen kan inntreffe. Hver tidsintervall er vektet med sannsynlighetsfordelingens tetthetsfunksjon, og betinget på at krisen ikke har inntruffet i tidspunktet konsum blir utsatt.

Uttrykket jeg nettopp har funnet, bruker jeg til å finne betingelsen for optimalt konsum:

$$u'(c_t) = \int_t^\infty e^{-r(\tau - t)} \frac{F'(z_\tau)x_\tau}{1 - F(z_t)} \frac{u(c_\tau) - r\epsilon}{x_\tau} d\tau \tag{1}$$

(1) er optimumsbetingelsen for konsum. I optimum må marginalkostnaden av utsatt konsum være lik marginalgevinsten. En marginal utsettelse av konsum i

[5]Tiden krisen utsettes ved å avstå konsum er gitt av den inverse av $\dot{z}(t)$: $\dot{z}(t) = x(t)$, $\dot{z}(t)^{-1} = 1/x(t)$.

tidspunkt t, gir et nyttetap lik marginalnytten av konsum. Gevinsten av utsettelsen er gitt av høyre side av likheten, som jeg gjenkjenner fra tidligere. Ved å utsette konsumet, faller produksjon og utslipp. Et lavere akkumulert nivå av klimagasser i atmosfæren utsetter klimakrisen i all fremtid. Tolkningen av likhetens høyre side er derfor den samme som tidligere.

Resultatene jeg har funnet karakteriserer den optimale løsningen på det dynamiske problemet. Fordi dette problemet er enkelt, er det mulig å finne den fullstendige løsningen. Når jeg skal prøve å karakterisere løsningen til det fullstendige problemet, vil ikke det være mulig. For å kunne sammenligne resultatene i denne enkle modellen med dem jeg finner for det fullstendige problemet, vil jeg derfor nå også karakterisere den optimale konsumbanen. Jeg finner den ved å derivere H'_x med hensyn på tid[6].

$$\omega \frac{\dot{c}_t}{c_t} + r = \mu_t x_t [\frac{\frac{u(c_t) - r\epsilon}{x_t} - u'(c_t)}{u'(c_t)}]$$

Likningen over forteller at konsum vokser over tid så lenge forventet realavkastning av å utsette konsum er større enn nyttediskonteringsraten r. Jeg gjenkjenner likningen som en variant av Euler-likningen (Acemoglu, 2009, s. 302), der høyre side er den forventede realavkastningen av å utsette konsum. Dersom avkastningen av å utsette konsum er større en nyttediskonteringsraten r, er det optimalt å utsette konsumet til et nært fremtidig tidspunkt. Hvor bratt den optimale konsumbanen er, avgjøres av ω. Grensenyttefleksibiliteten ω forteller hvor raskt grensenytten av konsum faller i konsum. Dersom grensenytten er sterkt fallende i konsum, bør konsumet i mindre grad utsettes. For alt annet likt, vil da

[6] Jeg henviser igjen til Appendiks A for full utregning.

avkastningskravet være høyere.

Som sagt er høyre side av likhetstegnet den forventet realavkastning i et nært fremtidig tidspunkt av å utsette konsum i tidspunkt t, gitt i prosent. Med den betingede sannsynligheten $\mu_t x_t$ vil miljøkrisen inntreffe i $[t, t + dt]$. Om hendelsen skulle inntreffe, vil avkastningen av å utsette konsum være $\frac{u(c_t) - r\epsilon}{x_t} - u'(c_t)$. Som jeg tidligere har forklart, er første leddet avkastningen av å utsette konsum, mens grensenytten av konsum reflekterer kostnaden av utsettelsen. Dersom sannsynligheten for å nå klimakrisen i tidsintervallet $[t, t + dt]$ er liten, er realavkastningen av å utsette konsum lav. Jo større den betingede sannsynligheten for å nå krisen er, jo større er realavkastningen av å utsette konsum. Om realavkastningen av å utsette konsum er større en nyttediskonteringsraten r, vil det være optimalt å utsette konsum. Det taler for en stigende konsumbane.

Ved å dele på ω og flytte r over på høyre side av likheten, finner jeg den optimale banen for konsum. Banen er tilsvarende Loury (1978) sin optimale konsumbane.

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\frac{1}{u'(c_t)} \mu_t x_t \left[\frac{u(c_t) - r\epsilon}{x_t} - u'(c_t)\right] - r}{\omega_t} \tag{2}$$

6 Jakten på en ny teknologi

For å kunne drøfte investeringsbeslutningen alene, ser jeg nå bort fra en mulig miljøkrise. Til gjengjeld inkluderer jeg jakten på en ny grønn teknologi. Jeg antar at produksjon har en løpende kostnad, og ved å utvikle en grønn teknologi vil man kunne produsere til en lavere kostnad. For å nå et teknologisk gjennombrudd, må et ukjent nivå kunnskap akkumuleres. Hvor mye investeringer som må til for å nå kunnskapsnivået som utløser gjennombruddet er ukjent, men jo mer man investerer jo høyere er sannsynligheten for å nå gjennombruddet.

$$f(x_t) = c_t + m_t + ax_t$$

Likningen over er ressursbetingelsen til denne enkle økonomien. Produksjon kan allokeres mellom konsum og investering i grønn teknologi, og har en kostnad ax_t per tidsenhet. Ved et teknologisk gjennombrudd vil kostnaden falle til et nivå b. Jeg antar at $a > b$.

Dersom det teknologiske gjennombruddet nås ved et tidspunkt t, vil velferden w utløses. Fordi jeg antar at fremtidig nytte neddiskonteres, inkluderer jeg nyttedikonteringsraten r. Samfunnsplanleggeren finner optimalt konsum, investering og produksjon i hvert tidspunkt ved å løse følgende problem:

Problem 6.1.

$$Max_{c,m,x} \int_0^\infty \Pi'(\tau) \Big[\int_0^\tau e^{-rt} u(c_t) dt + e^{-r\tau} w \Big] d\tau$$

$$forutsatt\ at$$

$$\dot{k}(t) = h(m_t),\ k(0) = 0,\ k(\infty)\ er\ fri,$$

$$f(x_t) = c_t + m_t + ax_t$$

Jeg setter opp den løpende Hamiltonfunksjonen og de tilhørende optimumsbetingelsene[7]:

$$H(t,m,x,k,p) = (1-G(k_t))u(f(x_t)-m_t-ax_t) + G'(k_t)h(m_t)w + p_t[h(m_t)]$$

$$\begin{aligned}
H'_x &= (1-G(k))u'(c_t)(f'(x_t)-a) \leq 0 \\
H'_m &= -(1-G(k))u'(c_t) + G'(k_t)h'(m)w + p_t h'(m) \leq 0 \\
\dot{p}_t &= rp_t - H'_k = rp_t + G'(k_t)u(c_t) - G''(k_t)h(m_t)w
\end{aligned}$$

Antagelsene $lim_{c \to 0}\ u'(c_t) = \infty$ og $lim_{m \to 0}\ h'(m_t) = \infty$ sikrer at problemet har en indre løsning. Dermed følger det at alle de tre betingelsene vil holde med likhet. Fra $H'_x = 0$ ser jeg at optimalt utslipp, og dermed også optimal produksjon, vil være konstant $(f'(x_t) - a = 0, f'(x_t) = a \implies x = x(a))$[8]. Problemet reduseres derfor til å finne optimal allokering av en gitt mengede produksjon mellom konsum og investeringer.

Noen resultater

På samme måte som ved løsningen av 5.1, definerer jeg hasardraten $\eta_t := \frac{G'(k_t)}{1-G(k_t)}$ som den betingede sannsynligheten for å nå det teknologiske gjennombruddet, gitt at det ennå ikke har inntruffet ved kunnskapsnivå k_t. Jeg løser differensiallikningen for den adjungerte funksjonen p_t og finner:

[7] Jeg henviser til Appendiks B for full utregning.

[8] Dette står i kontrast til problem 5.1. I problem 5.1 kan grenseproduktiviteten være konstant og produksjonen fortsatt variere. Det kommer av at i motsetning til dette problemet, har utslipp en kostnad i form av økt sannsynlighet for en klimakrise.

$$\frac{p_t}{1-G(k_t)} + \eta_t w = \int_t^{\infty} e^{-r(\tau - t)} \frac{G'(k_\tau)h(m_\tau)}{1-G(k_t)} \frac{rw - u(c_\tau)}{h(m_\tau)} d\tau$$

Uttrykket gir verdien av ressursen pluss kunnskapsressursens avkastning ved et tidspunkt t, gitt at det teknologiske gjennombruddet ennå ikke har inntruffet ved kunnskapsnivå k_t. Ressursens verdi reflekteres i teknologiressursens skyggepris p_t. Skyggeprisen reflekterer verdien av å nærme seg det teknologiske gjennombruddet. Avkastningen av å investere i forskning og utvikling er gitt som den forventede avkastningen av å nå gjennombruddet i et nært fremtidig tidspunkt. Det er verdien av å nå gjennombruddet, multiplisert med den betingede sannsynligheten for at gjennombruddet inntreffer, gitt at gjennombruddet ennå ikke har inntruffet ved kunnskapsnivå k_t.

Ved å løse differensiallikningen for p_t, finner jeg høyre side av likheten. Uttrykket tolkes som den neddiskonterte forventede avkastningen av å utsette konsum i tidspunkt t. For å tolke utrykket, følger jeg igjen Loury (1978, s. 626). Ved å utsette konsum øker investeringene i grønn teknologi. Dermed skifter banen for akkumulert kunnskap, $\dot{k}_t$, og det teknologiske gjennombruddet fremskyndes. La meg, som Loury, først anta at det teknologiske gjennombruddet inntreffer med sikkerhet i tidspunkt s, $s \geq t$. Som resultat av at konsumet utsettes til fordel for økte investeringer, vil gjennombruddet bli fremskutt med $\frac{1}{h(m_s)}$ tidsenheter[9]. Avkastningen av å utsette konsum er derfor gitt som $e^{-r(s-t)} \frac{rw-u(c_s)}{h(m_s)}$. Jeg antar at nettovelferden ved gjennombruddet, $rw - u(c_s)$, er positiv. Fordi det er usikkerhet knyttet til når det teknologiske gjennombruddet faktisk vil finne sted, er den totale avkastningen en vektet sum over alle mulige små tidsintervall gjennom-

[9]Tiden gjennombruddet fremskyndes ved å avstå konsum er gitt av den inverse av $\dot{k}(t)$: $\dot{k}(t) = h(m(t)), \dot{k}(t)^{-1} = 1/h(m(t))$.

bruddet kan inntreffe. Hvert tidsintervall vektes med sannsynlighetsfordelingens tetthetsfunksjon, og er betinget på at gjennombruddet ennå ikke har funnet sted ved utsettelsestidspunktet t.

Jeg bruker det foregående utrykket til å finne betingelsen for optimal allokering av ressurser mellom konsum og investering.

$$\frac{u'(c_t)}{h'(m_t)} = \int_t^\infty e^{-r(\tau-t)} \frac{G'(k_\tau)h(m_\tau)}{1-G(k_t)} \frac{rw-u(c_\tau)}{h(m_\tau)} d\tau \tag{3}$$

Allokering av ressurser mellom konsum og investeringer må i optimum tilfredsstille (3). Betingelsen gir at i optimum må den forventede nettoavkastningen av å avstå en marginal enhet konsum til fordel for investering i forskning og utvikling, være lik kostnaden. For å øke investeringene i forskning og utvikling, må konsumet falle. Venstre side av likhetstegnet er marginalkostnaden av utsatt konsum i tidspunkt t, målt i nyttetap per økning i akkumulert kunnskap. Jeg gjenkjenner høyre side av likheten som forventet nettoavkastningen av å utsette konsumet til fordel for økt investering i tidspunkt t. Tolkningen er gitt over.

Resultatene karakteriserer den optimale løsningen av Problem 6.1. Igjen, for å kunne sammenligne resultatene jeg har funnet med resultater jeg finner senere, setter jeg også opp den optimale konsumbanen. Jeg finner den ved å derivere H'_m med hensyn på t.

$$\left(\frac{c_t}{m_t}\sigma + \omega\right)\frac{\dot{c}_t}{c_t} + r = \frac{h'(m_t)}{u'(c_t)}\eta_t h(m_t)[\frac{rw-u(c_t)}{h(m_t)} - \frac{u'(c_t)}{h'(m_t)}]$$

Likningen over er en ny utgave av den velkjente Euler-likningen (Acemoglu, 2009, s. 302). Konsumet vokser over tid så lenge realavkastningen av å utsette konsum overstiger nyttediskonteringsraten r. Hvor bratt konsumbanen er, avhenger av $\frac{c_t}{m_t}\sigma + \omega$. Jo høyere σ og ω er, jo raskere faller marginalnytten av konsum og marginalakkumulasjonen av kunnskap i henholdsvis konsum og investeringer. Det er mindre gunstig å utsette konsum dersom nyttetapet av å utsette konsum vokser raskt i konsum. Tilsvarende er det mindre gunstig utsette konsum til fordel for investering dersom økningen i akkumulert kunnskap faller raskt i investeringer. Derfor vil konsumbanen være flatere dersom σ og ω har høye verdier, da det gir et høyere avkastningskrav om alt annet holdes likt.

Høyre side av likheten er forventet realavkastning i nær fremtid av å utsette konsumet, til fordel for investering i grønn teknologi, på tidspunkt t. Uttrykket er gitt i prosent. Med den betingede sannsynligheten $\eta_t h(m_t)$ vil det teknologiske gjennombruddet finne sted i $[t, t + dt]$. Dersom gjennombruddet faktisk finner sted, vil nettoavkastningen av å utsette konsum være gitt som $\frac{rw-u(c_t)}{h(m_t)} - \frac{u'(c_t)}{h'(m_t)}$. På den ene siden gir utsettelse av konsum nytte i form av at banen for akkumulert kunnskap skifter og det teknologiske gjennombruddet inntreffer ved et tidligere tidspunkt. På den andre siden vil utsatt konsum på tidspunkt t føre til et nyttetap gitt som marginalnytten av konsum per økning i akkumulert kunnskap. Nettoavkastningen vektes med den betingede sannsynligheten for å nå et gjennombrudd. Dersom sannsynligheten for å nå det teknologiske gjennombruddet er høy, er realavkastningen av å investere stor. Uttrykket multipliseres med $\frac{h'(m_t)}{u'(c_t)}$, som er økningen i akkumulert kunnskap per enhets marginal nytte. Dersom akkumulert kunnskap øker mye i investeringer og nyttetapet er lite, vil realavkastningen av å utsette konsum til fordel for økt investering i grønn teknologi være høy.

Ved å flytte r over på høyre side og dele på $\frac{c_t}{m_t}\sigma + \omega$, finner jeg den optimal konsumbanen i prosent som:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\frac{h'(m_t)}{u'(c_t)}\eta_t h(m_t)[\frac{rw-u(c_t)}{h(m_t)} - \frac{u'(c_t)}{h'(m_t)}] - r}{\frac{c_t}{m_t}\sigma + \omega} \tag{4}$$

7 Den fulle løsningen

Jeg returnerer nå til det sammensatte problemet. Jeg antar at produksjon genererer utslipp, og at produksjon kan konsumeres eller investeres i grønn teknologi. En samfunnsplanlegger må ta to avgjørelser. Planleggeren må fastsette optimal produksjon, og allokere produksjonen mellom konsum og investering. I de to enkle modellene jeg til nå har analysert, er de to avgjørelsene drøftet isolert. Nå vil jeg karakterisere en fullstendig optimal løsning, og jeg finner at løsningen er sammensatt av de to delløsningene.

Den fullstendige løsningen kan ikke karakteriseres som en kombinasjon av de to delløsningene alene. Som forklart tidligere kan to hendelser inntreffe, det teknologiske gjennombruddet eller klimakrisen. Hvilken av de to som inntreffer er usikkert, men avgjørende for samfunnets velferd. Basert på tidligere valg, former planleggeren en forventning om hvilken terskel som vil bli nådd. Forventningen vil endres kontinuerlig når valg om produksjon og investering blir tatt, og kan derfor betraktes som endogen. Dette står i kontrast til de to enkle problemene jeg til nå har analysert.

Dersom økonomien befinner seg i en situasjon med lite akkumulert kunnskap og mye akkumulert utslipp, vil sannsynligheten for å nå klimaterskelen være høy. Dermed vil planleggerens forventede velferd etter en terskel, være lav. Dette kan være tilfelle dersom produksjonen har vært høy over lenger tid, og størsteparten av produksjonen har gått til konsum fremfor investeringer. Sannsynligheten for å nå klimakrisen vil dermed være høy, mens sannsynligheten for det teknologisk gjennombruddet lav.

$\Theta(t) := \Gamma_t \cdot V^{MK} + \Lambda_t \cdot V^{TG}$ er planleggerens forventning om velferden som utløses dersom en terskel nås i tidspunkt t. Jeg gjentar at sannsynligheten for å nå en terskel er $P(t)$:

$$P(t) := F(z(t)) + G(k(t)) - F(z(t))G(k(t))$$

med tetthetsfunksjon $P'(t)$:

$$P'(t) = F'(z(t))x_t \cdot (1 - G(k(t))) + G'(k(t))h(m_t)(1 - F(z(t)))$$

Jeg har definert x_t som bruk av fossilt brensel, eller utslipp av klimagasser, per tidsenhet[10]. Det fossile brenselet brukes som innsatsfaktor i produksjon, og jeg antar beholdningen av fossilt brensel foreligger i ubegrenset mengde. Produksjonsfremskaffelsen kan brukes på konsum og investeringer, i tillegg til at bruk av fossilt brensel gir utslipp av skadelige klimagasser. Samfunnsplanleggerens problem er:

[10]Som sagt er bruk av fossilt brensel og klimagassutslipp i én-til-én forhold.

Problem 7.1.

$$Max_{c,m,x} \int_0^{\infty} P'(\tau))\Big[\int_0^{\tau} e^{-rt}u(c_t)dt + e^{-r\tau}\Theta(\tau)\Big]d\tau$$

$$Forutsatt\ at$$

$$\dot{z}(t) = x_t,\ z(0) = 0,\ z(\infty)\ er\ fri$$

$$\dot{k}(t) = h(m_t),\ k(0) = 0,\ k(\infty)\ er\ fri$$

$$f(x_t) = c_t + m_t$$

$$\Theta(t) := \Gamma_t \cdot V^{MK} + \Lambda_t \cdot V^{TG}$$

Jeg setter opp den løpende Hamiltonfunksjonen med sine tilhørende optimumsbetingelser[11]:

$$H(t, x, m, z, k, q, p) = (1 - P(t))u(f(x_t) - m_t) + P'(t)\Theta(t) + q_t[x_t] + p_t[h(m_t)]$$

$$H'_x = (1 - P(t))u'(c_t) + F'(z_t)(1 - G(k_t)) \cdot \Theta(t) + P'(t) \cdot \frac{\partial \Theta(t)}{\partial x_t} + q_t \leq 0$$

$$H'_m = -(1 - P(t))u'(c_t) + G'(k_t)h'(m_t)(1 - F(z_t)) \cdot \Theta(t) + P'(t) \cdot \frac{\partial \Theta(t)}{\partial m_t} + p_t h'(m_t) \leq 0$$

$$\begin{aligned}\dot{q}_t = rq_t - H'_z = rq_t + F'(z_t)(1 - G(k_t))u(c_t) - F''(z_t)x_t(1 - G(k_t)) \cdot \Theta(t) \\ +F'(z_t)G'(k_t)h(m_t) \cdot \Theta(t) - P'(t) \cdot \frac{\partial \Theta(t)}{\partial z_t}\end{aligned}$$

[11] Jeg antar at $f'(x_t) = 1$.

$$\dot{p}_t = rp_t - H'_k = rp_t + G'(k_t)(1 - F(z_t))u(c_t) - G''(k_t)h(m_t)(1 - F(z_t)) \cdot \Theta(t) \\ + G'(k_t)F'(z_t)x_t \cdot \Theta(t) - P'(t) \cdot \frac{\partial \Theta(t)}{\partial k_t}$$

Jeg antar at planleggerens forventede velferd etter en terskel faller i akkumulert klimagassutslipp og stiger i akkumulert kunnskap[12]:

$$\frac{\partial \Theta(t)}{\partial z_t} = \frac{\partial \Gamma_t}{\partial z_t} V^{TG} + \frac{\partial \Lambda_t}{\partial z_t} V^{MK} < 0$$

$$\frac{\partial \Theta(t)}{\partial k_t} = \frac{\partial \Gamma_t}{\partial k_t} V^{TG} + \frac{\partial \Lambda_t}{\partial k_t} V^{MK} > 0$$

Fordi jeg antar $lim_{c \to 0} \ u'(c_t) = \infty$ og $lim_{m \to 0} \ h'(m_t) = \infty$, har problemet indre løsning. $H'_x \leq 0$ og $H'_m \leq 0$ holder derfor med likhet. Optimumsbetingelsen $H'_x = 0$ gir optimalt utslipp for en gitt mengde investeringer i grønn teknologi. For en gitt mengde utslipp, gir $H'_m = 0$ optimal mengde investering i grønn teknologi.

Når mengden investeringer holdes fast, er optimalt utslipp gitt av optimumsbetingelsen $H'_x = 0$. Med sannsynlighet $(1 - P(t))$ vil ikke en terskel bli nådd innen tidspunkt t, sett fra tidspunkt $t = 0$. For en gitt mengde investeringer, vil da en marginal økning i utslippet gi en velferdsgevinst lik marginalnytten av konsum. Samtidig øker sannsynligheten for å nå en terskel i nær fremtid. Samfunnsplanleggeren forventer at velferden $\Theta(t)$ vil bli realisert etter terskelen. I optimum må den løpende nyttegevinsten balanseres mot endring i kostnad av at miljøkrisen kommer nærmere. Verdien av å nærme seg krisen reflekteres i miljøressursens

[12] I tillegg antar jeg $P'(t) \cdot \frac{\partial \Theta(t)}{\partial x_t} \approx 0$ og at $P'(t) \cdot \frac{\partial \Theta(t)}{\partial m_t} \approx 0$. Med andre ord vil samfunnsplanleggerens forventning om velferden etter en terskel nås, være konstant i x og m i et nært område.

skyggepris, q_t, som er negativ.

$H'_m = 0$ gir optimal investering i grønn teknologi når utslipp, og dermed produksjon, holdes fast. Med sannsynlighet $(1 - P(t))$ vil ikke en terskel nås innen tidspunkt t, sett fra $t = 0$. Når investeringene i forskning og utvikling øker, faller konsumet. Med andre ord vil en marginal investering gi en kostnad lik marginalnytten av konsum. I optimum må nyttetapet være lik marginalverdien av investeringen. Ved å øke investeringene, øker sannsynligheten for å nå en terskel i nær fremtid og planleggeren forventer at velferden $\Theta(t)$ vil bli utløst dersom dette skjer. Når investeringene øker marginalt, øker også akkumulert kunnskap med $h'(m_t)$ enheter, og det teknologiske gjennombruddet kommer nærmere. Verdien av å nærme seg gjennombruddet er gitt av kunnskapsressursens skyggepris p_t.

Resultater

Ved hjelp av optimumsbetingelsene og ressursbetingelsen, løser jeg det simultane systemet[13] og finner følgende tre optimale kontrollbaner[14]:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{[I]}{\omega} \tag{5}$$
$$\frac{\dot{m}_t}{m_t} = \frac{[I] - [II]}{\sigma} \tag{6}$$
$$\frac{\dot{x}_t}{x_t} = \frac{\big(\sigma c_t + \omega m_t\big)[I] - \omega m_t[II]}{\omega\sigma x_t} \tag{7}$$

[13] Jeg henviser til Appendiks C for full utregning.

[14] Jeg presiserer at likningene (5), (6) og (7) angir henholdsvis helningen til konsumet, investeringene og utslippet med hensyn på tid. Helningen er gitt for et lite fremtidig tidsintervall.

der

$$[I] := \left[\frac{1}{u'(c_t)}\frac{F'(z_t)x_t(1-G(k_t))}{1-P(t)}\left(\frac{u(c_t)+\Theta'(t)-r\cdot\Theta(t)}{x_t}\right)\right] \\ -\left[\frac{1}{u'(c_t)}\frac{P'(t)}{1-P(t)}\left(\frac{\partial\Theta(t)}{\partial z_t}+u'(c_t)\right)+r\right]$$

$$[II] := \left[\frac{h'(m_t)}{u'(c_t)}\frac{G'(k_t)h(m_t)(1-F(z_t))}{1-P(t)}\left(\frac{r\,\Theta(t)-u(c_t)-\Theta'(t)}{h(m_t)}\right)\right] \\ -\left[\frac{h'(m_t)}{u'(c_t)}\frac{P'(t)}{1-P(t)}\left(\frac{u'(c_t)}{h'(m_t)}-\frac{\partial\Theta(t)}{\partial k_t}\right)+r\right]$$

Denne løsningen ser ved første øyekast komplisert ut. Selv om det er mange effekter som virker inn, vil jeg prøve å gi en tolkning av den fulle løsningen.

Hver av de tre optimale kontrollbanene er sammensatt av $[I]$ og $[II]$.[15] $[I]$ er sammenliknbar med den optimale konsumbanen tilhørende problem 5.1, mens $[II]$ er sammenliknbar med den optimale konsumbanen tilhørende problem 6.1. Både $[I]$ og $[II]$ tolkes som den forventede nettoavkastningen av å utsette konsum når henholdsvis utslipp kan falle og investering i grønn teknologi kan øke.

Den optimale avveiningen mellom høyt forbruk og lavt utslipp blir beskrevet av $[I]$. $[I]$ er den forventede realavkastningen av å utsette konsum til fordel for redusert klimagassutslipp, minus avkastningskravet. Dersom det er optimalt å utsette konsumet i periode t, må den forventede realavkastningen overgå avkast-

[15] Den optimale konsumbanen avhenger ikke av $[II]$. Dette kommer av at veksten i akkumulert utslipp er lineær i løpende utslipp, $\dot{z}_t = x_t$. Dersom $\dot{z}_t = g(x_t)$, og $g'(x_t) > 0$ $g''(x_t) \neq 0$ ville $[II]$ vært en del av den optimale konsumbanen. I tillegg ville den optimale banen for investering hatt ett ekstra $[II]$-ledd.

ningskravet. Dersom det er tilfelle, vil den optimale konsumbanen være stigende i omegn til høyre for t.

Ved å redusere konsumet vil utslippet reduseres, og banen for akkumulert utslipp, $\dot{z}_t$, skifte. Realavkastningen av å redusere utslippet på tidspunkt t er derfor gitt som avkastningen av at klimakrisen blir utsatt. Dersom krisen faktisk inntreffer ved tidspunkt t, vil unnlatt konsum utsette krisen med $\frac{1}{x_t}$ tidsenheter. Avkastningen er gitt som $u(c_t) + \Theta'(t) - r \cdot \Theta(t)$ per tidsenhet krisen utsettes. Fordi det er knyttet usikkerhet til hvorvidt klimakrisen faktisk vil inntreffe, multipliseres utrykket med den betingede sannsynligheten for å nå klimakrisen, gitt at det ennå ikke har inntruffet noen hendelse. Dersom sannsynligheten for å nå krisen er høy, er realavkastningen av å redusere utslippet stor.

Avkastningskravet reflekterer verdien av å konsumere fremfor å utsette, og består av tre komponenter. For det første, ved å konsumere på tidspunkt t oppnås marginalnytten av konsum. For det andre gir produksjon utslipp, og derfor øker sannsynlighet for å nå miljøkrisen. Planleggerens forventning om velferden etter terskelen, vil da falle. For det tredje vil avkastningskravet være større jo mer fremtidig velferd neddiskonteres. Jo større nyttediskonteringsraten r er, jo mer verdsettes konsum i dag fremfor lavere sannsynlighet for en fremtidig krise.

Realavkastningen og avkastningskravet er vektet med ulike betingede sannsynligheter. Realavkastningen er verdien av å utsette klimakrisen, og vektes derfor med den betingede sannsynligheten for å nå krisen i nær fremtid, gitt at en hendelse ennå ikke har inntruffet. Avkastningskravet vektes derimot med den betingede sannsynligheten for å nå en av de to tersklene, gitt at en hendelse ennå ikke har inntruffet. Dersom sannsynligheten for å treffe en terskel i nær fremtid er høy, vil det i mindre grad være optimalt å utsette konsum. Om sannsynligheten for å nå det teknologiske gjennombruddet er høy, vil det være optimalt i mindre grad å dempe produksjon og utslipp, da det er høyst sannsynlig at økonomien uansett blir reddet .

Avveiningen mellom høyt konsum og lavt utslipp blir beskrevet av $[I]$. På samme måte beskriver $[II]$ optimal allokering av ressurser mellom konsum og investering i grønn teknologi. Mer presist, $[II]$ er den forventede realavkastningen av å utsette konsum til fordel for investering i grønn teknologi, minus avkastningskravet. Utsatt konsum vil kunne gi høyere investering i forskning og utvikling, og vil dermed kunne fremskynde et teknologisk gjennombrudd. Imidlertid vil det gi et løpende nyttetap lik marginalnytten av konsum.

Den forventede realavkastningen av å utsette konsum til fordel for økte investeringer i grønn teknologi, er gitt som verdien av at det teknologiske gjennombruddet kommer nærmere. Realavkastningen vektes tyngre dersom sannsynligheten for å nå et gjennombrudd i nær fremtid er høy. Avkastningskravet gir minste forventet realavkastning som gjør utsatt konsum, til fordel for økte investeringer i forskning og utvikling, optimalt. Kravet er gitt av marginalnytten av konsum, endret forventet velferd etter terskelen, og nyttediskonteringsraten r. Ved å konsumere fremfor å investere, vil planleggerens forventede velferd etter terskelen falle. Dette er et resultat av at sannsynligheten for å nå det teknologiske gjennombruddet faller. Av samme grunn som for $[I]$, vektes avkastningskravet med den betingede sannsynligheten for å nå en terskel, gitt at en hendelse ennå ikke har inntruffet.

La meg nå se nærmere på (5), (6) og (7). De angir hvordan optimalt konsum, investeringer og utslipp utvikler seg i et nært fremtidig tidsintervall. Som sagt er de gitt som en sammensetning av $[I]$ og $[II]$, men også av elastisitetene ω og σ. Jeg gjentar at antagelsen om at elastisitetene er konstante over tid, og gitt som $\omega := -\frac{u''(c_t)}{u'(c_t)}c_t$, $\sigma := -\frac{h''(m_t)}{h'(m_t)}m_t$.

Dersom $[I]$ er stor, vil det være optimalt å i større grad utsette både konsum, investeringer og utslipp i omegn like etter t. Det følger av likning (5), (6) og (7) at jo større $[I]$ er, jo mer stigende vil konsum, investering og utslipp være. Om realavkastningen av å redusere utslippet er høy, og avkastningskravet for å redusere utslippet er lavt, bør produksjonen dempes for å redusere utslippet. Som konsekvens av lavere produksjon, vil også konsum og investering måtte utsettes.

Realavkastningen minus avkastningskravet av å investere i grønn teknologi fremfor konsum, er gitt av $[II]$. Jo større realavkastningen av å investere i teknologi er, jo flere ressurser bør allokeres til forskning og utvikling. Om $[II]$ er stor, bør derfor investeringene øke fremfor å utsettes. Følgelig vil det i mindre grad være optimalt å utsette produksjon og utslipp.

Ved å studere (6), kommer samspillet mellom $[I]$ og $[II]$ tydeligere frem. (6) er sammensatt av realavkastningen og avkastningskravet for redusert utslipp, i tillegg til realavkastningen og avkastningskravet for redusert konsum til fordel for økte investeringer. Dersom realavkastningen av å redusere utslippet er høy, er kostnaden av å investere større. Det taler for at investeringene i større grad bør utsettes til nær fremtid. Det vil derimot være mindre optimalt å utsette investeringene, dersom avkastningskravet for redusert utslipp er høyt. Et høyt avkastningskrav taler for mindre utsettelse av produksjon og utslipp, og flere ressurser kan allokeres til forskning og utvikling. Om realavkastningen av å øke investeringene er høy, vil planleggeren selvsagt ønske å bruke flere ressurser på investering. Da vil det være optimalt å investere fremfor å utsette. Dersom avkastningskravet for å øke investeringene er høyt, vil det derimot være mindre gunstig å dempe konsumet til fordel for økte investeringer. Da vil være optimalt å utsette investeringene til nær fremtid.

For den optimale utslippsbanen, spiller σ og ω viktige roller. La meg først drøfte hvordan σ påvirker optimalt utslipp, for så å ta for meg ω.

(7) blir i større grad påvirket av klimakostnaden ved produksjon dersom σ er høy. En høy σ tilsier at økt akkumulert kunnskap faller raskt i investeringer. Dermed gir investeringer liten økning i kunnskap ved høy investeringsgrad. Som resultat av mindre kunnskapsakkumulasjon, må planleggeren i større grad ta skaden ved produksjon inn over seg. Da vil det være optimalt i større grad å utsette produksjonen for å minske klimaskaden. Dette reflekteres i at utslippet er mer stigende i et nært tidsintervall, når σ er høy.

Dersom ω er høy, faller grensenytten raskt i konsum. Dette påvirker (7) både positivt og negativt. Utslippet vil være mer sensitiv for både klimakostnaden og teknologigevinsten ved produksjon. En raskt fallende marginalnytte i konsum gir to virkninger. For det første gjør det utslipp mer kostbart da verdien av anvendelsen er lavere. For det andre gjør det investering i grønn teknologi relativt mer verdifullt. Klimakostnaden gjør det optimalt for planleggeren å utsette utslippet, men fordi planleggeren også tar inn over seg teknologigevinsten av produksjon vil den optimale utsettelsen bli mindre i omegn etter t.

8 Konklusjoner

Jeg har analysert en økonomi som står overfor to stokastiske terskler, en klimaterskel og en teknologiterskel. Ved produksjon akkumuleres klimagasser i atmosfæren, og ved et ukjent nivå akkumulert utslipp vil en klimaterskel nås. Ved å investere i forskning og utvikling vil det ved et ukjent nivå på kunnskap utvikles en ny grønn teknologi. Jeg har antatt at investering i forskning og utvikling krever ressurser som må gå på bekostning av konsum, eller som skaffes ved høyere produksjon. Dersom det teknologiske gjennombruddet inntreffer før klimakatastrofen, vil økonomien være reddet.

Ved å bruke optimal kontrollteori med usikkerhet, har jeg modellert en økonomi som står overfor to potensielle terskler. Fordi jeg har antatt at det er usikkert både når en hendelse vil inntreffe og hvilken som inntreffer, er problemet krevende å analysere. Jeg har funnet optimale baner for konsum, investering og utslipp i nær fremtid. I tillegg har jeg funnet betingelser for optimal utsettelse av konsum til fordel for lavere utslipp og høyere investering.

Samfunnsplanleggerens problem er omfattende, og ved å drøfte investerings- og utslippsavgjørelsen hver for seg, kommer de isolerte effektene tydelig frem. I faren for å nå en klimaterskel, vil planleggeren finne det optimalt å dempe konsum og produksjon. Om et teknologisk gjennombrudd kan gi produksjon til en lavere kostnad, vil planleggeren finne det optimalt å allokere ressurser til forskning og utvikling.

Jeg har vist at løsningen på det sammensatte problem ikke kan karakteriseres som en ren kombinasjon av de to delproblemene. Fordi økonomien står overfor et kappløp om å nå det teknologiske gjennombruddet før klimakrisen, vil planleggeren aldri kunne fastslå med sikkerhet hvilken av de to hendelsene som vil inntreffe. Likevel har planleggeren en forventning om hvilken terskel som vil nås. For hver utslipps- og investeringsbeslutning oppdateres planleggerens forventing, og forventningsverdien er derfor kontinuerlig i endring. Dette står i kontrast til de to delproblemene, der velferden som utløses når terskelen nås er gitt. Som konsekvens er det fulle problemet mer krevende å analysere.

Som sagt er mitt hovedresultat todelt. For å unngå klimakrisen må utslippet reduseres, og følgelig må konsumet reduseres. Hvor mye, avhenger av forholdet mellom sannsynligheten for å nå en klimakrise og sannsynligheten for å nå det teknologiske gjennombruddet. Dersom sannsynligheten for å nå gjennombruddet er høy, sammenliknet med sannsynligheten for nå klimakrisen, kan konsumet forbli høyt. Dette kommer av at faren for å nå klimaterskelen da er liten. Planleggeren kan da tillate høy produksjonen og utslipp uten å være bekymret for at klimakrisen vil inntreffe.

Dersom verdien av å investere i grønn teknologi er høy, bør ikke utslippet i like stor grad reduseres. Dette er mitt andre hovedresultat. Om ressurser blir allokert til investering i forskning og utvikling fremfor konsum, og sannsynligheten for å nå et teknologisk gjennombrudd er relativt høy, bør den utslippsgenererende produksjonen likevel holdes oppe. Ved å investere i grønn teknologi har planleggeren et håp om å nå et gjennombrudd før klimakrisen.

Litteraturliste

Acemoglu, D. (2009). *Introduction to Modern Economic Growth.* Princeton og Oxford: Princeton University Press.

Acemoglu, D., Aghion P., Bursztyn, L., & D. Hémous, D. (2012). The Environment and Directed Technical Change. *American Economic Rewiew*, 102 (1), 131-166.

Dasgupta, P. (1982). Resource depletion, research and development, and the social rate of discount. R. Lind (Red.), *Discounting for Time and Risk in Energy Markets* (273-314). London og New York: RFF press.

Dasgupta, P. & Stiglitz, J. (1981). Resource Depletion Under Technological Uncertainty. *Econometrica*, 49 (1), 85-104.

de Zeeuw, A. & C-Z. Li (2016). *Environmental and Resource Economics*, 65 (3), 513–517.

Fremtiden i våre hender. (2015). *Jakten på den siste olje — et klimaperspektiv på Statoils internasjonale satsing*, (6/2015). Hentet fra https://www.framtiden.no/dokarkiv /rapporter/rapporter-2015/757-jakten-pa-den-siste-olje/file.html

Kamien, M. I. & Schwartz, N. L. (1978). Optimal Exhaustible Resource Depletion with Endogenous Technical Change. *The Review of Economic Studies*, 45 (1), 179-196.

Lemoine, D. & Traeger, C. (2014). Watch Your Step: Optimal Policy in a Tipping Climate. *American Economic Journal: Economic Policy*, 6 (1), 137-166.

Lemoine, D. & Traeger, C. (2016). Ambiguous tipping points. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 132, 5-18.

Loury, G. C. (1978). The Optimal Exploitation of an Unknown Reserve. *The Review of Economic Studies*, 45 (3), 621-636.

Språkrådet (2015). Årets ord: det grønne skiftet. Hentet 8. mai 2018 fra http://www.sprakradet.no/Vi-og-vart/hva-skjer/Aktuelt/2015/arets-ord-det-gronne-skiftet/.

Strøm, S & Vislie, J. (2018). *Wealth Management and Uncertain Tipping Points.* Upublisert manuskript. Økonomisk Institutt, Universitetet i Oslo.

van der Ploeg, F. & de Zeeuw, A. (2013). *Climate Policy and Catastrophic Change: Be Prepared and Avert Risk.* Upublisert manuskript. Department of Economics, European University at St. Petersburg.

van der Ploeg, F. & de Zeeuw, A. (under publisering). Climate Tipping and Economic Growth: Precautionary Capital and the Price of Carbon. *Journal of the European Economic Association.*

Appendiks A

Full løsning av Problem 5.1

$$Max_{c,x} \int_0^\infty \Omega'(\tau)\Big[\int_0^\tau e^{-rt}u(c_t)dt + e^{-r\tau}\epsilon\Big]d\tau$$

$$s.t.$$

$$\dot{z}(t) = x_t,\ z(0) = 0,\ z(\infty)\ er\ fri,$$

$$f(x_t) = c_t$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \Omega'(\tau)\Big[\int_0^\tau e^{-rt}u(c_t)dt + e^{-r\tau}\epsilon\Big]d\tau &= \int_0^\infty \Omega'(\tau)d\tau \cdot \int_0^\tau e^{-rt}u(c_t)dt + \int_0^\infty \Omega'(\tau)d\tau \cdot e^{-r\tau}\epsilon \\
&= \int_0^\infty \Omega'(\tau)d\tau \cdot A(\tau) + \int_0^\infty \Omega'(\tau)d\tau \cdot B(\tau) \\
&= \int_0^\infty F'(z(\tau))x_\tau d\tau \cdot A(\tau) + \int_0^\infty F'(z(\tau))x_\tau d\tau \cdot *B(\tau)
\end{aligned}$$

$\mathrm{A}(\tau) = \int_0^\tau e^{-rt}u(c_t)dt,$

$\mathrm{B}(\tau) = e^{-r\tau}\epsilon$

$\lim_{\tau\to 0} A(\tau) = 0, \quad lim_{\tau\to\infty} A(\tau) = \int_0^\infty e^{-rt}u(c_t)dt$

$\lim_{\tau\to 0} B(\tau) = \epsilon, \quad lim_{\tau\to\infty} B(\tau) = 0$

$\lim_{\tau\to\infty} \Omega(\tau) = lim_{\tau\to\infty} F(z(\tau)) = 1$

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \Omega'(\tau)A(\tau) &= \Omega(\tau)A(\tau)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \Omega(\tau)A'(\tau)d\tau \\
&= \int_0^\infty e^{-rt}u(c_t)dt - \int_0^\infty \Omega(\tau)e^{-r\tau}u(c_\tau)d\tau \\
&= \int_0^\infty e^{-r\tau}\big(1-\Omega(\tau)\big)u(c_\tau)d\tau \\
&= \int_0^\infty e^{-r\tau}\big(1-F(z(\tau))\big)u(c_\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

$$
\implies \int_0^\infty \Omega'(\tau)\Big[\int_0^\tau e^{-rt}u(c_t)dt+e^{-r\tau}\epsilon\Big]d\tau = \int_0^\infty e^{-r\tau}\Big[\big(1-F(z(\tau))\big)u(c_\tau)+F'(z(\tau))x_\tau\epsilon\Big]d\tau
$$

Dermed kan jeg sette opp den løpende Hamiltonfunksjonen, med tilhørende optimale betingelser:

$$
H(t,x,z,q) = (1-F(z_t))u(f(x_t)) + F'(z_t)x_t\epsilon + q_t[x_t]
$$

$$
\begin{aligned}
H'_x &= (1-F(z_t))u'(c_t) + F'(z_t)\epsilon + q_t = 0 \\
\dot{q}_t &= rq_t - H'_z = rq_t + F'(z_t)u(c_t) - F''(z_t)x_t\epsilon
\end{aligned}
$$

<u>Jeg løser differensiallikning for den adjungerte funksjonen $q(t)$</u>

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_t &= rq_t + F'(z_t)u(c_t) - F''(z_t)x_t\epsilon \\
\frac{d}{dt}[e^{-rt}q_t] &= e^{-rt}[F'(z_t)u(c_t) - F''(z_t)x_t\epsilon] \\
e^{-rt}q_t &= q(0) + \int_0^t e^{-rt}[F'(z_\tau)u(c_\tau) - F''(z_\tau)x_\tau\epsilon]d\tau
\end{aligned}
$$

og bruker at $\lim_{t\to\infty} e^{-rt} q_t = 0$

$$-q(t) = \int_t^\infty e^{-r(\tau-t)}[F'(z_\tau)u(c_\tau) - F''(z_\tau)x_\tau\epsilon]d\tau$$

$$-q(t) = \int_t^\infty e^{-r(\tau-t)}[F'(z_\tau)u(c_\tau)d\tau - \int_t^\infty e^{-r(\tau-t)}F''(z_\tau)x_\tau\epsilon]d\tau$$

$$\left[\ \int_t^\infty e^{-r(\tau-t)}F''(z_\tau)x_\tau\epsilon]d\tau = \epsilon[e^{-r(\tau-t)}F'(z_\tau)]_t^\infty + r\epsilon\int_t^\infty e^{-r(\tau-t)}F'(z_\tau)d\tau\ \right]$$

$$q(t) = \int_t^\infty [r\epsilon - u(c_\tau)]F'(z_\tau)d\tau + \epsilon[0 - F'(z_t)]$$

$$q(t) = -F'(z_t)\epsilon + \int_t^\infty [r\epsilon - u(c_\tau)]F'(z_\tau)d\tau$$

$$\boxed{\frac{q_t}{1-F(z_t)} + \frac{F'(z_t)}{1-F(z_t)}\epsilon = \int_t^\infty e^{-r(\tau-t)}\frac{F'(z_\tau)x_\tau}{1-F(z_t)}\frac{r\epsilon - u(c_\tau)}{x_\tau}d\tau}$$

Jeg finner optimumsbetingelsen for konsum:

Setter $q(t)$ inn i H'$_x$:

$$
\begin{aligned}
(1-F(z_t))u'(c_t) &= -F'(z_t)\epsilon - q_t \\
-u'(c_t) &= [\frac{q_t}{1-F(z_t)} + \frac{F'(z_t)}{1-F(z_t)}\epsilon]
\end{aligned}
$$

$$\boxed{u'(c_t) = \int_t^{\infty} e^{-r(\tau-t)} \frac{F'(z_\tau)x_\tau}{1-F(z_t)} \frac{u(c_\tau)-r\epsilon}{x_\tau} d\tau}$$

Jeg finner også den optimale konsumbanen:[16]

f(x$_t$) $= c_t, \ \dot{x}_t = \dot{c}_t$

$$(1-F(z_t))u'(c_t) + F'(z_t)\epsilon + q_t = 0$$

og deriverer med hensyn på t

$$-F'(z_t)x_t u'(c_t) + (1-F(z_t))u''(c_t)\dot{c}_t + F''(z_t)x_t\epsilon + \dot{q}_t = 0$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{F'(z_t)}{1-F(z_t)}x_t u'(c_t) + u''(c_t)\dot{c}_t + \frac{F''(z_t)x_t\epsilon}{1-F(z_t)} \\
+\left[r\frac{q_t}{1-F(z_t)} + \frac{F'(z_t)}{1-F(z_t)}u(c_t) - \frac{F''(z_t)}{1-F(z_t)}x_t\epsilon\right] = 0
\end{aligned}
$$

$$u''(c_t)\dot{c}_t = \mu\left[u'(c_t)x_t - u(c_t)\right] - r\frac{q_t}{1-F(z_t)}$$

[16]Jeg antar at f'(x$_t$) = 1

Til slutt bruker jeg $H_x = 0$, og finner den optimale konsumbanen:

$$\boxed{\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\frac{1}{u'(c_t)}\mu_t x_t[\frac{u(c_t)-r\epsilon}{x_t} - u'(c_t)] - r}{\omega_t}}$$

der $\mu_t = \frac{F'(z_t)}{1-F(z_t)}$

Appendiks B

Full løsning av Problem 6.1

$$Max_{c,m,x} \int_0^\infty \Pi'(\tau)\Big[\int_0^\tau e^{-rt}u(c_t)dt + e^{-r\tau}w\Big]d\tau$$
$$s.t.$$
$$\dot{k}(t) = h(m_t), k(0) = 0, k(\infty)\ er\ fri$$
$$f(x_t) = c_t + m_t + ax_t$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \Pi'(\tau)\Big[\int_0^\tau e^{-rt}u(c_t)dt + e^{-r\tau}w\Big]d\tau &= \int_0^\infty \Pi'(\tau)d\tau * \int_0^\tau e^{-rt}u(c_t)dt + \int_0^\infty \Pi'(\tau)d\tau * e^{-r\tau}w \\
&= \int_0^\infty \Pi'(\tau)d\tau \cdot D(\tau) + \int_0^\infty \Pi'(\tau)d\tau \cdot E(\tau) \\
&= \int_0^\infty G'(k(\tau))h(m_t)d\tau \cdot D(\tau) + \int_0^\infty G'(k(\tau))h(m_t)d\tau \cdot E(\tau)
\end{aligned}$$

$\mathrm{D}(\tau) = \int_0^\tau e^{-rt}u(c_t)dt,$

$\mathrm{E}(\tau) = e^{-r\tau}w$

$\lim_{\tau\to 0} D(\tau) = 0, \quad lim_{\tau\to\infty} D(\tau) = \int_0^\infty e^{-rt}u(c_t)dt$

$\lim_{\tau\to 0} E(\tau) = w, \quad lim_{\tau\to\infty} E(\tau) = 0$

$\lim_{\tau\to\infty} \Pi(\tau) = lim_{\tau\to\infty} G(k(\tau)) = 1$

$$\int_0^\infty \Pi'(\tau)D(\tau) = \Pi(\tau)D(\tau)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \Pi(\tau)D'(\tau)d\tau$$
$$= \int_0^\infty e^{-rt}u(c_t)dt - \int_0^\infty \Pi(\tau)e^{-r\tau}u(c_\tau)d\tau$$
$$= \int_0^\infty e^{-r\tau}\big(1-G(k(\tau))\big)u(c_\tau)d\tau$$

$$\implies \int_0^\infty \Pi'(\tau)\Big[\int_0^\tau e^{-rt}u(c_t)dt + e^{-r\tau}w\Big]d\tau = \int_0^\infty e^{-r\tau}\Big[\big(1-G(k(\tau))\big)u(c_\tau) + G'(k(\tau))h(m_t)w\Big]d\tau$$

Dermed kan jeg sette opp den løpende Hamiltonfunksjonen, med tilhørende optimale betingelser:

$$H(t,m,x,k,p) = (1-G(k_t))u(f(x_t)-m_t-ax_t) + G'(k_t)h(m_t)w + p_t[(h(m_t)]$$

$$H'_x = (1-G(k))u'(c_t)(f'(x_t)-a) = 0 \implies f'(x_t) = a$$
$$H'_m = -(1-G(k))u'(c_t) + G'(k_t)h'(m)w + p_t h'(m) = 0$$
$$\dot{p}_t = rp_t - H_k = rp_t + G'(k_t)u(c_t) - G''(k_t)h(m_t)w$$

<u>Jeg løser differensiallikning for den adjungerte funksjonen p_t</u>

$$\begin{aligned}
\dot{p}_t &= rp_t + G'(k_t)u(c_t) - G''(k_t)h(m_t)w \\
\frac{d}{dt}[e^{-rt}p_t] &= e^{-rt}[G'(k_t)u(c_t) - G''(k_t)h(m_t)w] \\
e^{-rt}p_t &= p(0) + \int_0^t e^{-rt}[G'(k_\tau)u(c_\tau) - G''(k)_\tau)h(m_\tau)w]d\tau
\end{aligned}$$

og bruker at $\lim_{t\to\infty} e^{-rt}p_t = 0$

$$\begin{aligned}
-p(t) &= \int_t^\infty e^{-r(\tau-t)}[G'(k_\tau)u(c_\tau) - G''(k_\tau)h(m_\tau)w]d\tau \\
-p(t) &= \int_t^\infty e^{-r(\tau-t)}[G'(k_\tau)u(c_\tau)d\tau - \int_t^\infty e^{-r(\tau-t)}G''(k_\tau)h(m_\tau)w]d\tau
\end{aligned}$$

$$\left[\ \int_t^\infty e^{-r(\tau-t)}G''(k_\tau)h(m_\tau)w]d\tau = w[e^{-r(\tau-t)}G'(k_\tau)]_t^\infty + rw\int_t^\infty e^{-r(\tau-t)}G'(k_\tau)d\tau\ \right]$$

$$\begin{aligned}
p(t) &= \int_t^\infty [rw - u(c_\tau)]G'(k_\tau)d\tau + w[0 - G'(k_t)] \\
p(t) &= -G'(k_t)w + \int_t^\infty [rw - u(c_\tau)]G'(k_\tau)d\tau
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{p_t}{1-G(k_t)} + \frac{G'(k_t)}{1-G(k_t)}w = \int_t^\infty e^{-r(\tau-t)}\frac{G'(k_\tau)h(m_\tau)}{1-G(k_t)}\frac{rw-u(c_\tau)}{h(m_\tau)}d\tau}$$

Jeg finner optimumsbetingelsen for konsum:

Setter $p(t)$ inn i H'$_m$:

$$(1 - G(k_t))u'(c_t) = p_t + G'(k_t)w$$
$$u'(c_t) = [\frac{p_t}{1 - G(k_t)} + \frac{G'(k_t)}{1 - G(k_t)}w]$$

$$\boxed{u'(c_t) = \int_t^\infty e^{-r(\tau - t)} \frac{G'(k_\tau)h(m_\tau)}{1 - G(k_t)} \frac{rw - u(c(\tau))}{h(m_\tau)} d\tau}$$

Jeg finner også den optimale konsumbanen:

$$-(1 - G(k))u'(c_t) + G'(k_t)h'(m_t)w + p_t h'(m_t) = 0$$

Jeg deriverer med hensyn på t

$$G'(k_t)h(m_t)u'(c_t) - (1 - G(k_t))u''(c_t)\dot{c}_t + G''(k_t)h(m_t)h'(m_t)w +$$
$$G'(k_t)h''(m_t)\dot{m}_t w + \dot{p}_t h'(m_t) + p_t h''(m_t)\dot{m}_t = 0$$

Jeg antar at $\dot{c}_t = -\dot{m}_t$, og setter inn for $\dot{p}_t$

$$\frac{G'(k_t)}{1 - G(k_t)}h(m_t)u'(c_t) - u''(c_t)\dot{c}_t + \frac{G''(k_t)h(m_t)h'(m_t)w}{1 - G(k_t)}$$
$$-\frac{G'(k_t)}{1 - G(k_t)}h''(m_t)\dot{c}_t w - \frac{p_t}{1 - G(k_t)}h''(m_t)\dot{c}_t$$
$$+\left[r\frac{p_t}{1 - G(k_t)} + \frac{G'(k_t)}{1 - G(k_t)}u(c_t) - \frac{G''(k_t)}{1 - G(k_t)}h(m_t)w\right]h'(m_t) = 0$$

Jeg bruker $H_x = 0$ til å finne den optimale konsumbanen:

$$\boxed{\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\frac{h'(m_t)}{u'(c_t)}\eta_t h(m_t)[\frac{rw-u(c_t)}{h(m_t)} - \frac{u'(c_t)}{h'(m_t)}] - r}{\omega_t + \sigma\frac{c_t}{m_t}}}$$

der $\eta_t = \frac{G'(k_t)}{1-G(k_t)}$.

Appendiks C

Full løsning av Problem 7.1

$$Max_{c,m,x} \int_0^\infty P'(\tau))\Big[\int_0^\tau e^{-rt}u(c_t)dt + e^{-r\tau}\big(\Gamma_\tau V^{MK} + \Lambda_\tau V^{TG}\big)\Big]d\tau$$

$$s.t.$$

$$\dot{z}(t) = x_t,\ z(0) = 0,\ z(\infty)\ er\ fri$$

$$\dot{k}(t) = h(m_t),\ k(0) = 0,\ k(\infty)\ er\ fri$$

$$f(x_t) = c_t + m_t$$

Jeg definerer:

$$\Theta(z(t), k(t), \dot{z}_t, \dot{k}_t, t) := \Gamma(z(t), k(t), \dot{z}_t, \dot{k}_t, t)\cdot V^{MK} + \Lambda(z(t), k(t), \dot{z}_t, \dot{k}_t, t)\cdot V^{TG} := \Theta_t$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty P'(\tau))\Big[\int_0^\tau e^{-rt}u(c_t)dt + e^{-r\tau}\Theta_t\Big]d\tau &= \int_0^\infty P'(\tau))d\tau \cdot \int_0^\tau e^{-rt}u(c_t)dt \\ &\quad + \int_0^\infty P'(\tau))d\tau \cdot e^{-r\tau}\Theta_t \\ &= \int_0^\infty P'(\tau)d\tau \cdot J(\tau) \\ &\quad + \int_0^\infty P'(\tau)d\tau \cdot K(\tau)\end{aligned}$$

J$(\tau) = \displaystyle\int_0^\tau e^{-rt}u(c_t)dt,$

K$(\tau) = e^{-r\tau}\Theta_t$

$\lim_{\tau\to 0} J(\tau) = 0, \quad lim_{\tau\to\infty} J(\tau) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-rt}u(c_t)dt$

$\lim_{\tau\to\infty} K(\tau) = 0$

$\lim_{\tau\to\infty} P(\tau) = 1$

$$\int_0^\infty P'(\tau)J(\tau) = P(\tau)J(\tau)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty P(\tau)J'(\tau)d\tau$$
$$= \int_0^\infty e^{-rt}u(c_t)dt - \int_0^\infty P(\tau)e^{-r\tau}u(c_\tau)d\tau$$
$$= \int_0^\infty e^{-r\tau}\big(1 - P(\tau)\big)u(c_\tau)d\tau$$

$$\implies \int_0^\infty P'(\tau)\Big[\int_0^\tau e^{-rt}u(c_t)dt + e^{-r\tau}\Theta_t\Big]d\tau$$
$$= \int_0^\infty e^{-r\tau}\Bigg[(1 - P(\tau)\big)u(c_\tau) + P'(\tau)\Theta_t\Bigg]d\tau$$

Dermed kan jeg sette opp den løpende Hamiltonfunksjonen, med tilhørende optimale betingelser:

$$H(t, m, x, k, z, p, q) = (1 - P(t))u(f(x_t) - m_t) + P'(t)\Theta_t + q_t[(x_t] + p_t[h(m_t)]$$

$$H'_x = (1 - P(t))u'(c_t) + F'(z_t)(1 - G(k_t))\Theta_t + P'(t)\frac{\partial\Theta_t}{\partial x_t} + q_t = 0$$

$$H'_m = -(1 - P(t))u'(c_t) + G'(k_t)h'(m_t)(1 - F(z_t))\Theta_t + P'(t)\frac{\partial\Theta_t}{\partial m_t} + p_t h'(m_t) = 0$$

$$\dot{q}_t = rq_t - H'_z = rq_t + F'(z_t)(1-G(k_t))u(c_t) - F''(z_t)x_t(1-G(k_t))\Theta_t$$
$$+F'(z_t)G'(k_t)h(m_t)\Theta_t - P'(t)\frac{\partial\Theta_t}{\partial z_t}$$

$$\dot{p}_t = rp_t - H'_k = rp_t - G'(k_t)(1-F(z_t))u(c_t) - G''(k_t)h(m_t)(1-F(z_t))\big(\Theta_t\big)$$
$$+G'(k_t)F'(z_t)x_t\Theta_t - P'(t)\frac{\partial\Theta_t}{\partial k_t}$$

Jeg antar $P'(t)\frac{\partial\Theta_t}{\partial x_t} \approx 0$, og $P'(t)\frac{\partial\Theta_t}{\partial m_t} \approx 0$.

<u>Jeg deriverer H_x med hensyn på t, og bruker uttrykket for $\dot{q}_t$ og $H_x = 0$:</u>

$$-P'(t)u'(c_t) + (1-P(t))u''(c_t)\dot{c}_t = -F''(z_t)x_t(1-G(k_t))\Theta_t$$
$$+ F'(z_t)G'(k_t)h(m_t)\Theta_t$$
$$- F'(z_t)(1-G(k_t))\frac{d\Theta_t}{dt} - \dot{q}_t$$

$$\omega\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{u'(c_t)}\Bigg[\frac{F'(z_t)x_t(1-G(k_t))}{1-P(t)}\Bigg(\frac{u(c_t)+\frac{d\Theta_t}{dt} - r\Theta_t}{x_t}\Bigg)$$
$$- \frac{P'(t)}{1-P(t)}\Bigg((\frac{\partial\Gamma_t}{\partial z_t}V^{TG} + \frac{\partial\Lambda_t}{\partial z_t}V^{MK}) + u'(c_t)\Bigg)\Bigg] - r$$

$$[I] := \frac{1}{u'(c_t)}\Bigg[\frac{F'(z_t)x_t(1-G(k_t))}{1-P(t)}\Bigg(\frac{u(c_t)+\frac{d\Theta_t}{dt} - r\Theta_t}{x_t}\Bigg)$$
$$- \frac{P'(t)}{1-P(t)}\Bigg((\frac{\partial\Gamma_t}{\partial z_t}V^{TG} + \frac{\partial\Lambda_t}{\partial z_t}V^{MK}) + u'(c_t)\Bigg)\Bigg] - r$$

Jeg deriverer H_m med hensyn på t, og bruker uttrykket for $\dot{p}_t$ og $H_m = 0$:

$$\begin{aligned}
-P'(t)u'(c_t) + (1 - P(t))u''(c_t)\dot{c}_t =& G''(kt)h(m_t)(1 - F(z_t))h'(m_t)\Theta_t \\
&- G'(k_t)F'(z_t)h'(m_t)x_t\Theta_t \\
&+ G'(k_t)(1 - F(z_t))h'(m_t)\frac{d\Theta_t}{dt} \\
&+ G'(k_t)(1 - F(z_t))h''(m_t)\Theta_t\dot{m}_t \\
&+ \dot{p}_t h'(m_t) + p_t h''(m_t)\dot{m}_t
\end{aligned}$$

$$\omega\frac{\dot{c}_t}{c_t} - \sigma\frac{\dot{m}_t}{m_t} = \frac{h'(m_t)}{u'(c_t)}\Bigg[\frac{G'(k_t h(m_t)(1 - F(z_t))}{1 - P(t)}\left(\frac{r\ \Theta_t - \big(u(c_t) + \frac{d\Theta_t}{dt}\ \big)}{h(m_t)}\right)$$

$$- \frac{P'(t)}{1 - P(t)}\left(\frac{u'(c_t)}{h'(m_t)} - \frac{\partial\Theta_t}{\partial z_t}\right)\Bigg] - r$$

$$\begin{aligned}
[II] := \frac{h'(m_t)}{u'(c_t)}\Bigg[&\frac{G'(k_t)h(m_t)(1 - F(z_t))}{1 - P(t)}\left(\frac{r\ \Theta_t - u(c_t) - \frac{d\Theta_t}{dt}}{h(m_t)}\right) \\
&- \frac{P'(t)}{1 - P(t)}\left(\frac{u'(c_t)}{h'(m_t)} - \frac{\partial\Theta_t}{\partial k_t}\right)\Bigg] - r
\end{aligned}$$

Jeg deriverer ressursbetingelsen med hensyn på t:

$$\begin{aligned} x_t &= c_t + m_t \\ \dot{x}_t &= \dot{c}_t + \dot{m}_t \\ \frac{\dot{x}_t}{x_t} x_t &= \frac{\dot{c}_t}{c_t} c_t + \frac{\dot{m}_t}{m_t} m_t \\ \frac{\dot{x}_t}{x_t} x_t - \frac{\dot{c}_t}{c_t} c_t - \frac{\dot{m}_t}{m_t} m_t &= 0 \end{aligned}$$

Dermed har jeg følgende lineære system:

$$\begin{aligned} \omega \frac{\dot{c}_t}{c_t} \qquad\qquad\qquad\qquad &= [I] \\ \omega \frac{\dot{c}_t}{c_t} - \sigma \frac{\dot{m}_t}{m_t} \qquad\qquad &= [II] \\ -c_t \frac{\dot{c}_t}{c_t} - m_t \frac{\dot{m}_t}{m_t} + x_t \frac{\dot{x}_t}{x_t} &= 0 \end{aligned}$$

Koeffisientmatrisen A til systemet:

$$A = \begin{bmatrix} \omega & 0 & 0 \\ \omega & -\sigma & 0 \\ -c_t & -m_t & x_t \end{bmatrix}$$

$$\left| A \right| = - \ \omega \ \sigma \ x_t$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} [I] & 0 & 0 \\ [II] & -\sigma & 0 \\ 0 & -m_t & x_t \end{vmatrix} = -\big(\sigma x_t\big)[I]$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \omega & [I] & 0 \\ \omega & [II] & 0 \\ -c_t & 0 & x_t \end{vmatrix} = -\big(\omega x_t\big)[I] + \big(\omega x_t\big)[II]$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \omega & 0 & [I] \\ \omega & -\sigma & [II] \\ -c_t & -m_t & 0 \end{vmatrix} = -\big(\omega m_t + \sigma c_t\big)[I] + \big(\omega m_t\big)[II]$$

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{D_1}{\big|A\big|} = \frac{[I]}{\omega}$$

$$\frac{\dot{m}_t}{m_t} = \frac{D_2}{\big|A\big|} = \frac{[I] - [II]}{\sigma}$$

$$\frac{\dot{x}_t}{x_t} = \frac{D_3}{\big|A\big|} = \frac{\big(\sigma c_t + \omega m_t\big)[I] - \omega m_t[II]}{\omega \sigma x_t}$$